

# **Software de Processamento e Realimentação Inteligente de Informação para Afinação de Guitarras**

*Pedro Guilherme de Sousa Pinto*

**Dissertação de Mestrado**

Orientadores:

Prof. João Manuel R. S. Tavares

Eng. Jorge Manuel de Matos Reis



**Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica**

Setembro 2015



## Resumo

Os afinadores representam, hoje em dia, um equipamento de grande importância na actividade de um instrumentista, independentemente de ser profissional ou amador. A afinação de instrumentos apresenta-se cada vez mais acessível, simples, rápida e permanece em constante evolução, acompanhando os avanços tecnológicos que se testemunham todos os dias.

A presente dissertação, inserida no Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica, tem como principal objectivo a concepção de uma aplicação informática capaz de conseguir recriar o comportamento de um afinador de guitarra, analisando o som emitido pelo instrumento, passando por um processo de tratamento e processamento dos dados recolhidos e, finalmente, fornecendo a informação necessária para uma afinação rápida, eficiente e intuitiva, por parte do utilizador.

Para tal, foi desenvolvido um algoritmo, em MATLAB, cujas funcionalidades e ferramentas, que coloca à disposição do utilizador, revelaram ser muito úteis para a concretização das metas propostas. Neste algoritmo foi adoptada uma abordagem de processamento na base de frequências, o que implicou a introdução de conceitos como transformadas de Fourier e Produto Harmónico Espectral (*Harmonic Product Spectrum*), técnicas vitais no desenvolvimento que levou ao produto final deste trabalho. O produto final apresenta duas funcionalidades, uma primeira que permite a afinação tradicional, corda a corda, e uma outra optimizada para uma afinação polifónica, ou seja, uma visualização e um aferimento contínuo no tempo da afinação das 6 cordas da guitarra, simultaneamente.

Concebido e implementado o *software*, foram realizados testes de conceito e de qualidade, onde se procurou identificar as características do seu comportamento aquando da sua aplicação em contextos reais nos quais, habitualmente, estes equipamentos são utilizados. Assim, foram conduzidos dois testes utilizando instrumentos diferentes que implicam contextos diferentes. Numa primeira instancia foi utilizada uma guitarra acústica, cujo som foi captado directamente da guitarra enquanto que, no segundo teste, foi utilizada uma guitarra eléctrica amplificada e o áudio analisado foi recolhido do amplificador e não da directamente guitarra. Os resultados obtidos nas provas revelaram-se consistentes para ambas as aplicações, quando comparadas com uma das mais populares aplicações móveis na categoria de afinação de instrumentos, o GuitarTuna™

**Palavras-chave:** Afinador, Processamento Digital de Sinais, Algoritmo, MATLAB, *Pitch Detection*, *Multi-Pitch Detection*, *Fast Fourier Transform*



# Audio Processing and Smart Feedback Software for Guitar Tuning Purposes

## Abstract

The electronic tuner has, currently, a very important role in any musician's daily activity, despite his professional or amateur intents. Tuning a musical instrument is becoming a simpler and faster task, which is developing, side by side, with every new technological and musical breakthrough.

This dissertation, part of the Masters Degree in Mechanical Engineering of the Faculty of Engineering of the University of Porto, has as its main goal the development of a computer algorithm, based on digital sound processing techniques, able to perform as an electronic guitar tuner, analyzing the sound waves sent by the instrument, processing the data acquired and, finally, providing the visual feedback needed for a fast and efficient tuning.

This software, developed in a MATLAB platform, approaches the tuning process by means of a frequency based signal analysis, which implies some study and knowledge in subjects such as the Fourier analysis, Fourier transforms and pitch detection techniques like the Harmonic Product Spectrum. The product designed has two different features, one that allows a traditional, single string tuning and a second optimized for a polyphonic tuning, in other words, a simultaneous tuning of the six guitar strings.

After conceiving the whole software, two performance tests were conducted to evaluate the product's behavioral characteristics in different contexts, that tried to recreate real situations and environments where this type of equipment is used. Initially, the software was used to tune an acoustic guitar and the sound data acquired was captured directly from the instrument. The second test was conducted using an amplified electric guitar, instead of an acoustic one, and the audio data was acquired from the amplifier's speaker. These two trials revealed very consistent results for both features when confronted with one of the most popular guitar tuner mobile apps, at the time, the GuitarTuna™.

**Keywords:** Electronic Tuner, Digital Sound Processing, Algorithm, MATLAB, Pitch Detection, Multi-Pitch Detection, Fast Fourier Transform



## Agradecimentos

Ao terminar esta dissertação, desejo agradecer a todos aqueles que contribuíram, directa ou indirectamente, para o resultado final deste trabalho.

Endereço os meus primeiros agradecimentos ao Doutor João Tavares e ao Engenheiro Jorge Reis, meus orientadores na execução deste projecto, pela disponibilidade, empenho e preocupação que demonstraram ao longo de todo o trabalho. Agradeço, especialmente, por permitirem que, nesta fase de conclusão do mestrado, pudesse desenvolver um trabalho que, não só se revelou desafiante e enriquecedor para a minha formação enquanto estudante de Engenharia Mecânica mas que, também, me permitiu explorar, simultaneamente, duas áreas muito importantes para mim, a engenharia e a música.

Agradeço à minha família, pelo apoio incondicional que sempre me ofereceram, não só durante este trabalho, mas também ao longo de todo o percurso que o antecedeu.

Aos meus amigos que, de uma forma ou de outra, sempre me ajudaram a superar todos os momentos menos positivos, estando, também, sempre presentes para celebrar e partilhar comigo os momentos de maior satisfação.





# Índice de Conteúdos

1	Introdução .....	1
1.1	Fundamento, motivação e objectivos .....	1
1.2	Contextualização temática – A música e a engenharia – .....	1
1.3	Estrutura da dissertação.....	2
2	Fundamentos e Estado da arte .....	5
2.1	Características do som.....	5
2.1.1	Sons Harmónicos.....	7
2.1.2	Frequência fundamental e respectiva série harmónica .....	8
2.1.3	A escala musical e sua relação de frequências .....	10
2.2	Guitarra .....	12
2.2.1	Guitarra Acústica.....	12
2.2.2	Guitarra Eléctrica .....	14
2.2.3	Cordas.....	15
2.3	Afinador .....	16
3	Processamento de Sinais Digitais (DSP) .....	21
3.1	Introdução ao DSP .....	21
3.2	Análise de Fourier .....	22
3.2.1	Transformadas de Fourier.....	23
3.2.2	Transformada Discreta de Fourier (DFT).....	27
3.2.3	Transformada Rápida de Fourier (FFT) .....	30
3.3	Análise tonal de um sinal áudio .....	34
3.3.1	Tonalidade .....	34
3.3.2	Análise monofónica vs polifónica .....	34
3.4	Algoritmos de análise tonal.....	35
3.4.1	Função de Autocorrelação (ACF) .....	35
3.4.2	Função da Diferença Média de Magnitudes (AMDF).....	37
3.4.3	Produto Harmónico Espectral (HPS).....	37
3.4.4	Cepstrum .....	40
4	Desenvolvimento de conceito e do produto.....	43
4.1	<i>Hardware</i> utilizado .....	43
4.2	<i>Software</i> desenvolvido .....	44
4.3	Funcionalidades do produto .....	50
4.3.1	Afinador monofónico (Tuner) .....	50
4.3.2	Afinador polifónico (Polyfonic Tuner) .....	53

4.4	Teste e comprovação de conceito.....	55
4.4.1	Teste com guitarra acústica .....	55
4.4.2	Teste com guitarra eléctrica.....	56
4.4.3	Conclusões.....	57
5	Conclusões e trabalhos futuros .....	59
	Referências .....	61

## Índice de Figuras

Figura 1.1 - Exemplo de uma <i>Digital Audio Workstation</i> (DAW) - estúdio de gravação e produção de áudio, virtual .....	2
Figura 2.1- Esquema exemplificativo do funcionamento do ouvido humano.....	6
Figura 2.2 – Gráfico representativo da gama auditiva do ouvido humano.....	6
Figura 2.3 - Exemplo de um sinal puro de frequência igual a 4 Hz .....	7
Figura 2.4 - Exemplo de um sinal afectado por ruído .....	7
Figura 2.5 - Exemplo de um sinal correspondente a uma série harmónica de 50 Hz .....	8
Figura 2.6 - Sinal representativo da nota A1 tocada na 5ª corda de uma guitarra.....	9
Figura 2.7 - Sinal representativo da nota A1 tocada num piano.....	10
Figura 2.8 - Esquema representativo da escala cromática temperada .....	11
Figura 2.9 - Representação das notas de um piano numa escala linear (em cima) e numa escala logarítmica (em baixo).....	11
Figura 2.10 - Guitarra acústica .....	12
Figura 2.11 - Corpo de uma guitarra acústica .....	12
Figura 2.12 - Esquema detalhado dos constituintes do braço de uma guitarra acústica.....	13
Figura 2.13 - A cabeça de uma guitarra acústica.....	13
Figura 2.14 - Imagem detalhada da estrutura de uma guitarra eléctrica.....	14
Figura 2.15 - Figura representativa do funcionamento de um <i>pickup</i> electromagnético .....	14
Figura 2.16 - Esquema representativo de um <i>pickup</i> piezoeléctrico .....	15
Figura 2.17 – Diapasão .....	16
Figura 2.18 - esquema demonstrativo do funcionamento de um estroboscópio.....	17
Figura 2.19 - Exemplo de um afinador estroboscópio - Peterson 400.....	18
Figura 2.20 - Peterson 70 (1964) - O primeiro modelo de afinador electrónico portátil.....	18
Figura 2.21 - Afinador de pinça e ecrã LED - Korg Pitchclip.....	19
Figura 2.22 - Afinador electrónico de ponteiro - Boss TU-80 .....	19
Figura 2.23 - Afinador polifónico de pedal - TC Electronic Polytune2 .....	19

Figura 2.24 - Afinador automático com aplicação para dispositivos móveis - Roadie .....	19
Figura 3.1 - Exemplos de aplicações de DSP em áreas distintas .....	21
Figura 3.2 - Esquema das primeiras quatro somas sinusoidais de uma função quadrado .....	22
Figura 3.3 - Esquema exemplificativo da decomposição conduzida pela transformada de Fourier .....	23
Figura 3.4 – Quadro síntese dos 4 tipos de transformadas de Fourier e respectivos exemplos de sinais de entrada.....	25
Figura 3.5 – Sinal obtido depois de aplicado o <i>zero padding</i> .....	26
Figura 3.6 - Exemplo de um sinal .....	26
Figura 3.7 - Amostra parcial do sinal repetido periodicamente .....	26
Figura 3.8 - Esquema da decomposição provocada pela DFT .....	27
Figura 3.9- Exemplo de correlação de sinais em que se pretende estudar a presença da sinusóide $s_3$ em dois sinais distintos, $x_1$ e $x_2$ . .....	29
Figura 3.10 - Imagem representativa da autocorrelação de um sinal. O sinal é comparado com uma versão sua, desfasada. Registando valores de correlação para cada desfasamento, obtém-se a função de autocorrelação, que é máxima quando o desfasamento é nulo. ....	36
Figura 3.11 - Esquema da sequência de operações do HPS .....	38
Figura 3.12 - Representação do espectro de frequências de um sinal, a) e do mesmo espectro com o período de amostragem reduzido para metade, b) .....	38
Figura 3.13 - Espectro resultante de uma redução do domínio de amostragem original para 1/4 .....	39
Figura 3.14 - Resultado espectral da aplicação do algoritmo HPS .....	39
Figura 3.15 - <i>Cepstrum</i> do sinal .....	41
Figura 3.16 - Sinal harmónico original.....	41
Figura 3.17 - Espectro obtido através da FFT do sinal. Pela análise dos pontos em destaque verifica-se uma periodicidade de "picos" .....	41
Figura 4.1 - Secção do código responsável por criar o canal de aquisição .....	45
Figura 4.2 - Dados recolhidos de um sinal periódico e respectiva FFT .....	46

Figura 4.3 - FFT de um conjunto de dados que não representam um número inteiro de períodos do sinal.....	47
Figura 4.4 - Janela Hanning de 8000 pontos .....	48
Figura 4.5 - Comparação do comportamento de diferentes funções e janela.....	48
Figura 4.6 - Linhas de código responsáveis pela obtenção da FFT.....	49
Figura 4.7 - Função criada para realização do <i>Harmonic Product Spectrum</i> .....	49
Figura 4.8 - Código da função <i>Octave</i> .....	51
Figura 4.9 - Código da função <i>FindNote</i> responsável por encontrar a nota da escala que servirá de referência para a afinação .....	51
Figura 4.10 - Interface gráfica do afinador monofónico .....	52
Figura 4.11 - Nota desafinada .....	52
Figura 4.12 - Nota afinada.....	53
Figura 4.13 - Interface da aplicação <i>Polyfonic Tuner</i> . Exemplo de guitarra desafinada.....	54
Figura 4.14 - Feedback oferecido pela aplicação quando a guitarra está afinada .....	54



## Índice de Tabelas

Tabela 2.1 - Tabela exemplificativa da relação entre a $F_0$ e a respectiva série harmónica.....	9
Tabela 3.1 - Evolução do algoritmo da FFT e respectivo custo operacional .....	33
Tabela 3.2 - Comparação entre custos operacionais do cálculo da DFT de forma directa e pela FFT .....	33
Tabela 4.1 - Características do computador utilizado no projecto .....	43
Tabela 4.2 - Características do filtro passa alto utilizado.....	45
Tabela 4.3 - Características do filtro band-stop utilizado.....	46
Tabela 4.4 - Conjuntos de frequências de análise para cada corda .....	53
Tabela 4.5 - Desvios de afinação iniciais do teste com guitarra acústica.....	55
Tabela 4.6 - Resultados da afinação obtidos através das três aplicações .....	56
Tabela 4.7 - Desvios iniciais do teste com guitarra eléctrica .....	56
Tabela 4.8 - Desvios de afinação obtidos no final da afinação da guitarra eléctrica.....	57





# 1 Introdução

---

## 1.1 Fundamento, motivação e objectivos

Esta dissertação de mestrado foi realizada no âmbito do curso Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, do ramo de Automação e o seu compromisso estabelece-se com o desenvolvimento de um software de processamento de sinais áudio, para a afinação de uma guitarra.

A ideia adoptada para este trabalho surgiu, principalmente, de uma grande vontade em explorar a cumplicidade, que hoje se torna cada vez mais notória, entre a engenharia e a música. No decorrer do período de trabalho sempre se procurou estudar e compreender de que forma os conhecimentos de engenharia poderiam solucionar problemas e simplificar a relação entre o ser humano e a música. Hoje, assistimos a um desenvolvimento convergente em que estas duas matérias se aproximam cada vez mais e um dos motivos que levou à realização deste projecto foi, precisamente, o desejo de compreender esta relação e de que forma ela afecta a perspectiva pessoal sobre a música.

O principal compromisso do trabalho desenvolvido consistiu na idealização e concepção de uma aplicação informática que permita uma rápida, intuitiva e eficiente afinação de uma guitarra. Contudo, esta derradeira meta pressupõe a concretização de um conjunto de objectivos intermédios de elevada importância, nomeadamente, a aquisição de conhecimentos em novas matérias e o desenvolvimento da capacidade de interacção com novas ferramentas informáticas.

## 1.2 Contextualização temática - A música e a engenharia -

A música, como forma de arte e de comunicação, acompanha a sociedade humana e a sua evolução há muito mais tempo do que se possa, vulgarmente, imaginar. Pode ser bastante complicado acreditar que a música tenha tido uma génese anterior a qualquer forma de escrita ou mesmo de dialecto padronizado, apesar de várias investigações apontarem nesse sentido.

A sua relação com a engenharia, embora nem sempre de forma consciente, esteve sempre presente desde o começo, uma vez que é impossível dissociar a produção de sons de fenómenos físicos e mecânicos.

Com a evolução tecnológica testemunhada nas últimas décadas, foram introduzidos novos instrumentos e novas ferramentas que possibilitaram novas abordagens no ramo musical,

nomeadamente, no que diz respeito a instrumentos electrónicos e equipamentos acessórios, que vieram simplificar a interacção Homem-Instrumento. Hoje, qualquer músico está rodeado de tecnologia e engenharia, desde o instrumento que toca, ao microfone que o capta, ao computador que o grava ou ao altifalante que o reproduz [5].

A indústria musical, nomeadamente nas suas áreas de produção e engenharia do som, são extremamente dependentes da tecnologia disponível e a sua evolução e inovação é, muitas vezes limitada pela mesma. Em todo o processo de gravação e produção de áudio estão presentes técnicas de aquisição e processamento de sinais e equipamentos electrónicos dedicados, sem os quais não seria possível produzir música com a qualidade e a facilidade com que hoje se faz. Actualmente, qualquer pessoa pode ter um estúdio de gravação de alto nível no seu computador pessoal, pois existem *softwares* dedicados à produção áudio, acessíveis a todo o público, que reúnem todas as capacidades e funcionalidades de um estúdio de gravação profissional, Figura 1.1.



Figura 1.1 - Exemplo de uma *Digital Audio Workstation* (DAW) - estúdio de gravação e produção de áudio, virtual [4]

Mesmo numa perspectiva amadora, alguém que pretenda aprender a utilizar um instrumento musical, como uma guitarra, tem um acesso favorecido a dispositivos como afinadores digitais portáteis, de utilização simples e que facilitam em grande escala a afinação do instrumento, para que o utilizador se possa focar no seu objectivo principal sem ter de ultrapassar obstáculos, outrora significativos. Actualmente, observa-se a continuidade desta evolução nos diferentes equipamentos e nas diferentes tecnologias introduzidos no mercado e que procuram simplificar ao máximo o processo musical, solucionando problemas, não só técnicos, mas também de conforto e mobilidade. Os afinadores, representam um dos principais alvos desta ideologia, o que se traduz numa infinidade de soluções disponíveis com diferentes especificações, como será apresentado nos seguintes capítulos [6].

### 1.3 Estrutura da dissertação

Perante os objectivos propostos e os meios necessários para os atingir, este trabalho dividiu-se em duas partes. A primeira consistiu numa pesquisa bibliográfica em que se procurou reunir informação sobre os vários conceitos e técnicas que se revelaram importantes para o produto desenvolvido. Nesta fase também se investigou a actualidade das soluções para a afinação de instrumentos musicais. A segunda metade do trabalho incidiu sobre a concepção

do *software*, abordando as suas principais características e capacidades e os resultados obtidos.

Desta forma, no primeiro capítulo são apresentados os objectivos e motivações que levaram à elaboração do trabalho bem como a sua estrutura. É também iniciada uma breve contextualização do tema do projecto e dos assuntos a explorar no restante relatório.

No capítulo 2 é apresentada uma pesquisa bibliográfica sobre os principais conceitos relativos à mecânica envolvida na produção de sons e também são explorados o funcionamento e as características da guitarra e do afinador, elementos de grande importância para o projecto.

No terceiro capítulo, é feita uma descrição detalhada sobre o processamento digital de sinais, passando pela explicação das suas bases assentes na análise de Fourier e terminando com a apresentação dos métodos utilizados na análise tonal.

No capítulo 4 é apresentada a concepção do algoritmo desenvolvido, as suas diferentes capacidades e é explicado o seu funcionamento, passo a passo. No final do capítulo são apresentados os resultados relativos aos testes de conceito e de produto realizados.

Por fim, no quinto e último capítulo, são retiradas as principais conclusões sobre o resultado final do projecto desenvolvido, indicadas possíveis melhorias para o produto e apontados novos trabalhos que possam dar continuidade a esta abordagem.



## 2 Fundamentos e Estado da arte

---

No processo de afinação de um instrumento musical existem vários elementos intervenientes, cujo conhecimento e análise são de elevada importância. É crucial conhecer os aspectos físicos e o funcionamento do instrumento, bem como do afinador utilizado e, com o objectivo do trabalho fixado na concepção de um afinador digital, esta necessidade revela-se ainda maior. Para que seja possível obter um resultado final satisfatório é importante compreender o objecto de estudo, neste caso o sinal sonoro, como é produzido e qual a sua relação com o instrumento que o produz, ao nível musical. Também é bastante relevante, uma vez que se pretende criar um produto, conhecer as abordagens presentes no mercado e como se desenvolveu o conceito, desde o momento da sua génese, até hoje.

### 2.1 Características do som

Uma primeira contextualização importante para a compreensão do trabalho apresentado diz respeito ao elemento principal em torno do qual toda a futura análise se centraliza: a onda sonora.

O som, de um ponto de vista mecânico, é uma onda causada pela vibração de um corpo que resulta numa oscilação de pressão capaz de se propagar num meio compressível. Enquanto a fonte se mantém a vibrar, as vibrações viajam pelo meio circundante a uma velocidade, velocidade do som, caracterizada pelas propriedades desse meio.

Ao atingirem um determinado receptor, essas ondas podem ser traduzidas de diferentes formas para que sejam interpretadas por um sistema. Tomando por exemplo o sistema auditivo humano, as ondas sonoras, ao atingirem o tímpano, provocam a sua vibração, por meio de oscilações de pressão. A energia recebida é transportada e, simultaneamente, amplificada, por unidade de superfície, até atingir o ouvido interno. Aí, as vibrações são transmitidas através de membranas para células nervosas, que as traduzem em impulsos eléctricos, posteriormente transportados para o cérebro, onde serão interpretados [7]. Todo este procedimento está exemplificado na Figura 2.1.



Figura 2.1- Esquema exemplificativo do funcionamento do ouvido humano, in “<https://s-media-cache-ak0.pinimg.com> consultado em 2015-08-11”

As ondas sonoras básicas, à semelhança das ondas sinusoidais, são caracterizadas por um comprimento de onda, uma amplitude e uma frequência e podem ser combinadas resultando em ondas complexas de características diferentes. Todos os sistemas receptores de ondas sonoras possuem uma determinada gama de funcionamento e uma determinada sensibilidade. Tomando o mesmo exemplo, o ouvido humano, à nascença, é capaz de captar sons com frequências entre os 20 e os 20.000 Hz e é sensível a variações de pressão na ordem dos 0.00002 Pa (20  $\mu$ Pa), Figura 2.2.

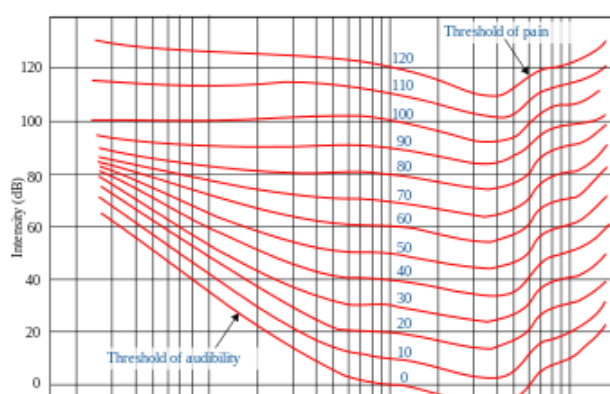


Figura 2.2 – Gráfico representativo da gama auditiva do ouvido humano [2]

### 2.1.1 Sons Harmónicos

Quando um sistema oscilador vibra a uma única frequência, este produz uma onda pura, Figura 2.3, ou seja, uma onda sinusoidal simples caracterizada pela sua frequência, amplitude e comprimento de onda. O diapasão ou a flauta são instrumentos cuja acção origina ondas sinusoidais puras, ou seja, caracterizadas por um único componente de frequência.

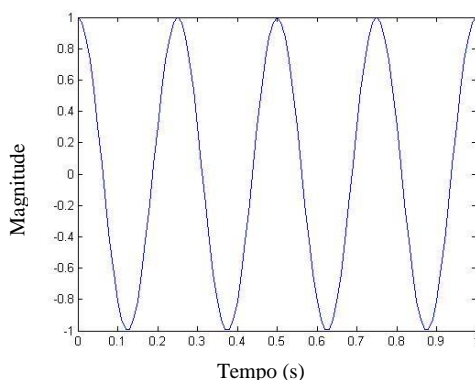


Figura 2.3 - Exemplo de um sinal puro de frequência igual a 4 Hz

Contudo, a maioria dos instrumentos musicais não apresenta estas características e, pelo contrário, são concebidos para que a sua vibração produza ondas complexas com vários componentes de frequências diferentes. Em sistemas deste tipo, as diferentes frequências de vibração podem, ou não estar harmonicamente relacionadas e é este aspecto que permite distinguir sons musicais de ruídos ou sons perturbadores [8].

Por exemplo, quando uma caneta ou um lápis é largado e cai no chão, o impacto com o solo provoca uma vibração complexa, a várias frequências distintas e sem qualquer relação, originando uma onda sonora complexa desagradável para o ouvido, Figura 2.4. Isto acontece, precisamente, porque, física e matematicamente, não se conhece uma relação definida entre as frequências produzidas e a onda originada é irregular e pouco suave.

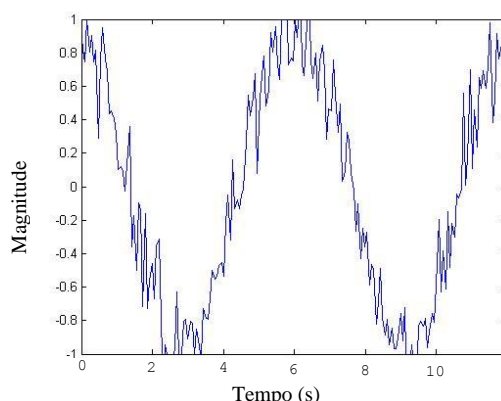


Figura 2.4 - Exemplo de um sinal afectado por ruído

Por outro lado, quando a vibração de um sistema resulta num conjunto de ondas cujas frequências se relacionam matematicamente e em proporções definidas, como por exemplo o som produzido por uma tuba, o resultado final representa um som agradável, suave e harmonioso, Figura 2.5. Este resultado é bastante diferente do caso anterior uma vez que o som produzido pela tuba corresponde a uma série de frequências harmónicas, conhecidas e definidas.

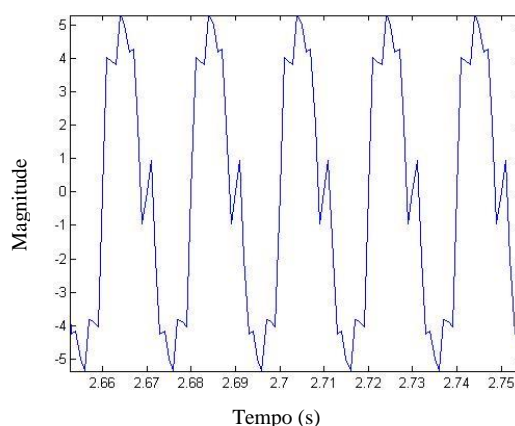


Figura 2.5 - Exemplo de um sinal correspondente a uma série harmónica de 50 Hz

Uma série harmónica representa um conjunto de frequências, todos múltiplos de uma frequência base, isto é, um conjunto de ondas cujas frequências estão matematicamente relacionadas através de rácios inteiros. Essa frequência base é a mais baixa do conjunto e é conhecida por frequência fundamental [9].

### 2.1.2 Frequência fundamental e respectiva série harmónica

A frequência fundamental ( $F_0$ ) de uma onda ou sinal corresponde à frequência mais baixa da série harmónica produzida e é segundo esta característica que se desenvolve o resto da série, uma vez que todos os harmónicos correspondem a múltiplos inteiros do seu valor.

Muitos tipos de onda, como as sinusoidais, são periódicas, ou seja, repetem-se de forma constante ao longo do tempo, segundo um período fixo,  $T$ , e nelas verifica-se sempre:

$$x(t) = x(t + T) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

onde:

$x$ , é o sinal em causa;  
 $t$ , representa um instante de tempo;  
 $T$ , é o período da onda.

Isto significa que, para valores múltiplos inteiros de  $T$ , o valor do sinal é o mesmo e o menor valor de  $T$  para o qual esta condição se verifica é conhecido por período fundamental, ou  $T_0$ . A frequência fundamental da onda corresponde ao inverso do período fundamental.



$$F_0 = \frac{1}{T_0} \quad (2.2)$$

onde:

$F_0$ , é o sinal em causa;  
 $T_0$ , é o período da onda.

A  $F_0$  é a característica que mais influencia o som produzido e é ela que permite identificar a sua tonalidade. Mais à frente será explicada a sua importância no âmbito do processamento de sinais áudio e do funcionamento de aparelhos como os afinadores. Os restantes harmónicos da série, ou *overtones*, desempenham um papel fundamental na caracterização da onda sonora. Os *overtones* podem ser mais ou menos intensos que o primeiro harmónico e é a conjugação das diferentes contribuições de cada elemento que determina o timbre de um determinado instrumento, ou seja, é esta característica que diferencia, por exemplo, um Lá tocado num piano da mesma nota tocada numa guitarra [9]. Nas Figuras 2.6 e 2.7 pode observar-se essa diferença tímbrica quando dois instrumentos diferentes produzem a mesma nota.

Tabela 2.1 - Tabela exemplificativa da relação entre a  $F_0$  e a respectiva série harmónica

Ordem	Série de <i>Overtones</i>	Série Harmónica	Componente de frequência
1	Frequência Fundamental ( $F_0$ )	1º Harmónico	$1F_0$
2	1º <i>Overtone</i>	2º Harmónico	$2F_0$
3	2º <i>Overtone</i>	3º Harmónico	$3F_0$
4	3º <i>Overtone</i>	4º Harmónico	$4F_0$
5	4º <i>Overtone</i>	5º Harmónico	$5F_0$

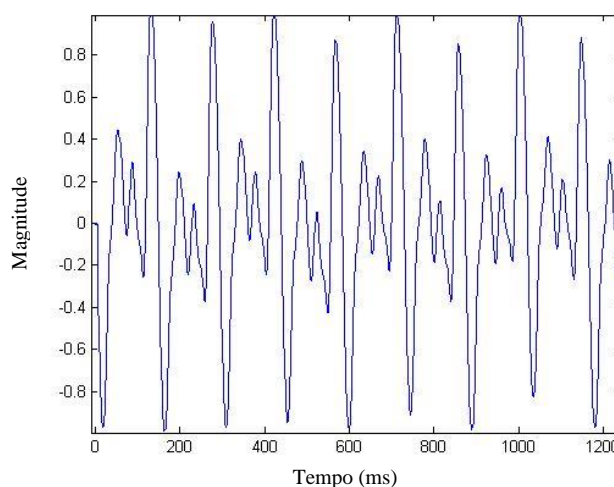


Figura 2.6 - Sinal representativo da nota A1 tocada na 5ª corda de uma guitarra

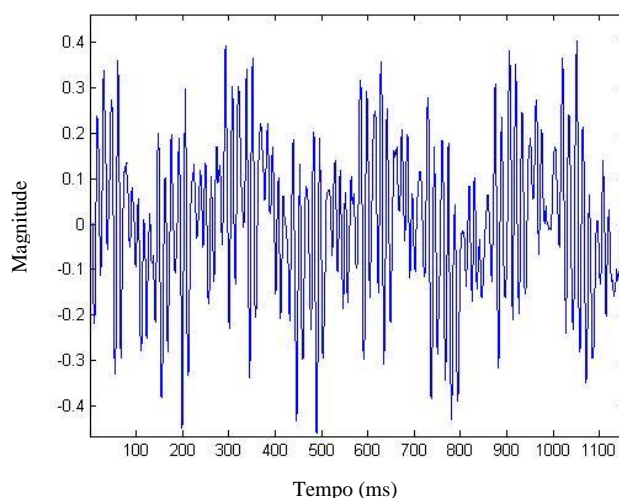


Figura 2.7 - Sinal representativo da nota A1 tocada num piano

### 2.1.3 A escala musical e sua relação de frequências

Uma escala musical representa um padrão para a organização de notas musicais segundo a sua tonalidade ou frequência fundamental. As escalas desempenham um papel muito importante não só na interpretação e composição musical mas, também, na afinação de instrumentos. Existe, actualmente, um vasto número de escalas diferentes, cada uma pressupondo regras distintas de organização e quantificação dos seus elementos, mas, na música ocidental contemporânea, a escala utilizada para a afinação da maioria dos instrumentos, como o piano e a guitarra, é a escala cromática temperada.

Uma escala temperada implica uma organização em que todas as notas estão igualmente espaçadas, ou seja, existe uma proporção fixa que dita o avanço na escala. Uma escala diz-se cromática quando é dividida em 12 notas, cada uma um semitom acima da anterior. Noutras palavras, a escala cromática temperada está dividida em 12 semitons igualmente espaçados entre si, Figura 2.8 [10].

Um dado importante a reter é que este espaçamento constante não é medido em quantidade, mas em proporção, ou seja, a distância entre semitons consecutivos não corresponde a um valor fixo de frequência, por exemplo 50 Hz, mas sim a um ganho constante e de valor igual a  $2^{1/12} \approx 1.059463$ .

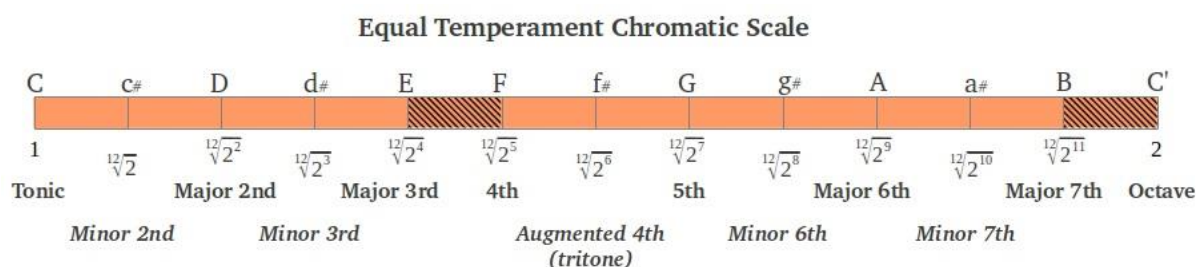


Figura 2.8 - Esquema representativo da escala cromática temperada (adaptado de [3])

Ao construir uma escala musical, partindo deste princípio, observa-se que, com o progredir da mesma, a distância, em frequência, entre semitons consecutivos vai aumentando exponencialmente, o que prova a não linearidade da escala musical numa base linear de frequências. Com o objectivo de procurar linearizar a escala, foi introduzido o conceito de *cent*, uma unidade de medida logarítmica utilizada para definir intervalos musicais, Figura 2.9. Da mesma forma que o decibel relaciona a intensidade sonora, o *cent* representa um rácio entre duas frequências e, por definição, estipulou-se que, numa escala temperada de 12 semitons, o intervalo entre dois semitons adjacentes representa 100 *cents*. Como uma oitava engloba 12 semitons, ou seja 1200 *cents*, então pode afirmar-se que um *cent* corresponde a um rácio de frequências de  $2^{1/1200} \approx 1.0005777895$ .

Conhecendo as frequências  $a$  e  $b$ , o número de cents que mede o intervalo entre ambas pode ser calculado como:

$$n = 1200 * \log_2 \left( \frac{b}{a} \right) \quad (2.3)$$

Onde:

$n$ , representa o intervalo entre  $a$  e  $b$  em *cents*.

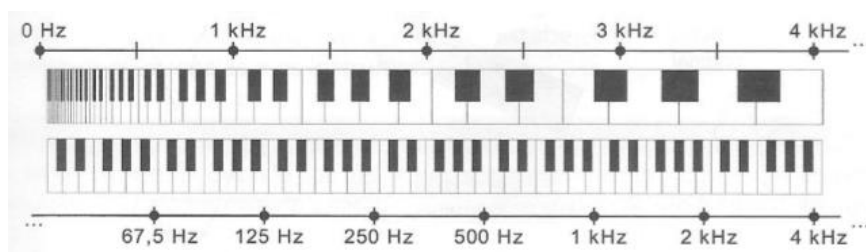


Figura 2.9 - Representação das notas de um piano numa escala linear (em cima) e numa escala logarítmica (em baixo) [4]

## 2.2 Guitarra

Depois de esclarecidos alguns dos aspectos básicos mais essenciais sobre ondas sonoras, é importante, também, compreender como essa teoria se aplica a um instrumento musical, nomeadamente, a uma guitarra. A guitarra é um instrumento musical de cordas, o que significa que o som que produz é originado pela vibração de cordas sob diferentes níveis de tensão. A sua anatomia é bastante importante no produto sonoro final, tal como os materiais de que é composta e a forma como é tocada.

### 2.2.1 Guitarra Acústica

O modelo acústico, Figura 2.10, é o mais tradicional no que diz respeito à família das guitarras. São compostas por duas partes, o corpo e o braço, cada uma com funções e elementos associados distintos que contribuem de diferentes formas para o produto final.



Figura 2.10 - Guitarra acústica, in “<http://guitar-auctions.co.uk/wp-content/uploads/2012/08/lot0125.jpg> consultado em 2015-08-11”

O corpo de uma guitarra acústica, Figura 2.11, é oco e, geralmente, arredondado e volumoso, uma vez que a sua principal função é actuar como uma caixa-de-ressonância e amplificar as ondas emitidas pelas cordas. Centrado com o alinhamento do braço, existe na parte inferior do corpo, um cavalete que serve de ponto de alinhamento e fixação das cordas [11].



Figura 2.11 - Corpo de uma guitarra acústica in “<http://folkwaymusic.10am.ca/wp-content/uploads/museum/20130529/Martin%20D-18%20Acoustic%20Guitar%20-%20Bridge.jpg> consultado em 2015-08-11”

O segundo elemento principal de uma guitarra, o braço, também pode ser estudado em duas secções: a escala e a cabeça. A escala, Figura 2.11, é a secção mais longa do braço. Nela são posicionadas uma série de barras de metal (trastes) que definem a escala musical em intervalos de meio-tom, sendo que, quando uma corda é pressionada no espaço entre dois trastes consecutivos, o som reproduzido vai corresponder a uma determinada nota da escala musical [11].

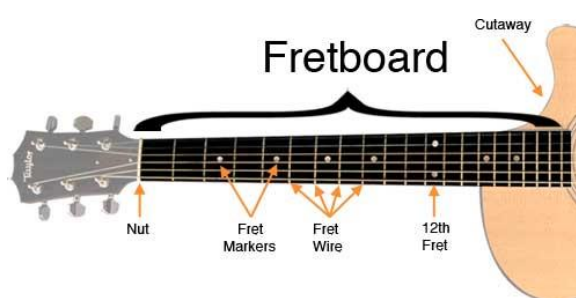


Figura 2.12 - Esquema detalhado dos constituintes do braço de uma guitarra acústica, in “<http://www.start-playing-guitar.com/image-files/fretboard.jpg> consultado em 2015-08-11”

A cabeça da guitarra, Figura 2.13, é a componente responsável pelo ajuste e controlo da tensão aplicada nas cordas. Esta secção contém o ponto terminal de cada corda, onde estas são enroladas e fixas por acção de 6 carrilhões/cravelhas, que assim permitem controlar a tensão em cada corda. No local de transição entre a cabeça e a escala existe uma pestana que serve de apoio e de guiamento posicional às 6 cordas.

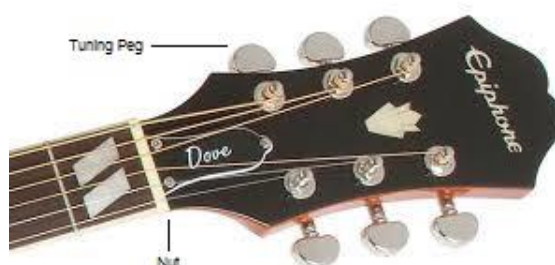


Figura 2.13 - A cabeça de uma guitarra acústica, in “[http://img0110.popscreencdn.com/160904838\\_-epiphone-dr-series-acoustic-guitar-truss-rod-cover-fit-.jpg](http://img0110.popscreencdn.com/160904838_-epiphone-dr-series-acoustic-guitar-truss-rod-cover-fit-.jpg) consultado em 2015-08-11”

## 2.2.2 Guitarra Eléctrica

A nível estrutural, a guitarra acústica e a eléctrica são muito semelhantes, apenas apresentando algumas diferenças na constituição do corpo, Figura 2.14.



Figura 2.14 - Imagem detalhada da estrutura de uma guitarra eléctrica, in “<http://guitarcollecting.co.uk/> consultado em 2015-08-11”

No modelo eléctrico, contrariamente ao acústico, o corpo não representa o elemento amplificador ou ressonador da guitarra. No seu lugar são utilizados *pickups* electromagnéticos, Figura 2.15, que captam a vibração das cordas de aço, traduzindo-a em sinais eléctricos posteriormente enviados a um amplificador que, por sua vez, reproduz o som correspondente ao sinal recebido.

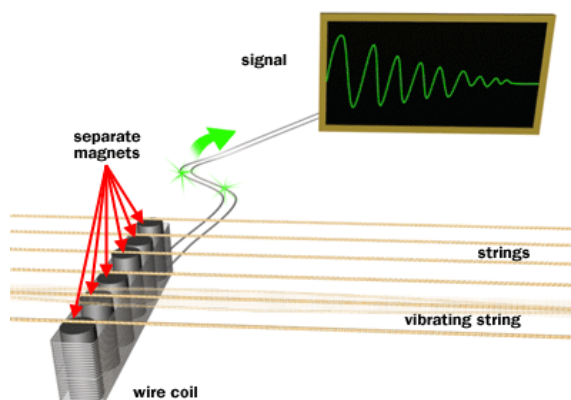


Figura 2.15 - Figura representativa do funcionamento de um *pickup* electromagnético, in “<http://4e7221.medialib.glogster.com/media/4c97499aad10d063b751e4cba2d46beb7b7dfe4da51c20195a8e7433df251a35/eg-magnets.jpg> consultado em 2015-08-11”

É importante reparar que em guitarras eléctricas usam-se cordas de aço, em detrimento das cordas de *nylon* utilizadas na maioria das guitarras acústicas. A escolha do material das cordas é muito relevante pois, neste caso, a captação do sinal vibratório e respectiva amplificação do instrumento é dependente do funcionamento dos seus captadores sonoros (*pickups*). Estes pequenos dispositivos são simples electroímãs que produzem um campo magnético estável. Quando se detecta alguma variação nesse campo, esta é traduzida num sinal eléctrico, que conserva as características da perturbação inicial, e pode ser transmitido e reinterpretado numa fase futura. Desta forma, apenas um elemento condutor, como o aço, é capaz de induzir essa variação no campo electromagnético, estático e em repouso, do *pickup*, o que exclui a possibilidade de utilizar cordas de nylon neste tipo de modelo [12].

Existem também modelos electroacústicos, guitarras tipicamente acústicas mas equipadas com *pickups* que permitem a amplificação eléctrica do som produzido, muitas vezes útil em gravações ou espectáculos de grandes dimensões. Nestes modelos os *pickups* são ligeiramente diferentes pois, captam as vibrações do próprio corpo de madeira e não directamente das cordas. Estes são denominados de *pickups* piezoeléctricos, Figura 2.16, ou seja, produzem um sinal eléctrico quando são deformados mecanicamente, neste caso pelos movimentos de contracção e extensão da madeira provocados pela vibração das cordas [12].

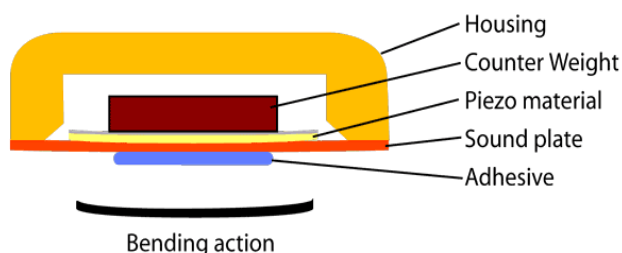


Figura 2.16 - Esquema representativo de um *pickup* piezoeléctrico, in “[http://img.auctiva.com/imgdata/1/5/1/4/0/0/1/webimg/442798544\\_tp.gif](http://img.auctiva.com/imgdata/1/5/1/4/0/0/1/webimg/442798544_tp.gif) consultado em 2015-08-11”

### 2.2.3 Cordas

Como já foi referido, a corda é o elemento que está na base do som de uma guitarra e, uma vez que a afinação das cordas é o cerne do problema abordado neste relatório, é importante conhecer as suas características mecânicas e como afectam este problema.

Cada corda, ao ser tocada, vibra desde a sua extremidade inferior (junto ao corpo da guitarra), ao longo de todo o seu comprimento até ao pente que une a cabeça da guitarra à escala e, como também já foi explicado, essa vibração propaga-se de forma semelhante a uma onda sinusóide com características próprias e bem definidas. Uma das características mais importantes no estudo presente é a frequência fundamental da vibração de cada corda e este



parâmetro está directamente relacionada com as suas propriedades mecânicas e com a forma como posicionadas no contexto de uma guitarra:

$$F_0 = \frac{v_{onda}}{2L}$$

$$\Leftrightarrow F_0 = \frac{\sqrt{\frac{T}{m/L}}}{2L} \quad (2.3)$$

Onde:

$F_0$ , é a frequência fundamental da vibração;  
 $v_{onda}$ , representa a velocidade da onda na corda;  
 $T$ , é a tensão da na corda;  
 $L$ , é o comprimento da corda;  
 $m$ , é a massa da corda.

## 2.3 Afinador

Qual a verdadeira definição de música? Muitos musicólogos concentram o seu trabalho na procura da derradeira resposta a esta questão e assim, surgem inúmeras doutrinas e teorias que se suportam num contexto mais espiritual, mais religioso, mais artístico ou até matemático mas, dada a grande subjectividade do conceito, muitos se conformam com a ideia de que música é todo o som que o homem entender como música [13].

Seguindo a perspectiva do compositor francês Edgard Varèse, é possível interpretar a música como uma forma e um conjunto organizado de sons, onde predominam conceitos como harmonia, timbre, melodia ou ritmo, entre outros, que constituem o conjunto das suas características [13]. Esta organização de sons, que muitas vezes provêm de fontes diferentes, instrumentos, vozes, entre outros, exige que exista uma referência comum a todos os intervenientes, quer a nível rítmico quer a nível harmónico. Assim, surge o conceito de afinação, que não é mais do que um processo de ajuste e calibragem harmónica relativa entre dois tons. Neste processo, habitualmente, uma das referências é fixa e o ajuste tem como objectivo igualar um determinado tom ao previamente estabelecido.

Durante muito tempo a afinação não foi um procedimento padronizado, ou seja, não havia um sistema padrão que estabelecesse alguma base ou referencial universal para a afinação de instrumentos, então, os músicos adaptavam-se e procuravam afinar instrumentos e vozes por comparação entre os diferentes intérpretes. Esta forma “desorganizada” de organizar a interpretação musical perdurou até ao início do século 18 quando, em 1711, o trompetista britânico John Shore apresentou ao mundo o primeiro diapásão, Figura 2.17.



Figura 2.17 – Diapásão [1]



Um diapasão não é mais do que um ressonador acústico em forma de forquilha, calibrado para que, ao ser golpeado, vibre a uma determinada frequência fixa. A sua frequência de vibração é função da sua morfologia (comprimento das hastes e seu espaçamento, espessura e forma) e também das propriedades do material de que é constituído, normalmente aço. Este equipamento tornou-se muito útil, principalmente para definir a referência tonal das orquestrações e peças em que intervêm vários instrumentos diferentes, permitindo centralizar a afinação de todos os instrumentos em torno de um só ponto. Actualmente, o diapasão mais comum produz a nota Lá a 440 Hz, frequência que corresponde ao som produzido pela segunda corda do violino e pela primeira corda da viola, tocadas em aberto, o chamado “concert pitch”.

Ainda hoje, o diapasão é muito utilizado pela sua portabilidade e fácil utilização mas, simultaneamente, levanta bastantes problemas, nomeadamente ao nível da sua versatilidade e eficiência. Sendo um procedimento “manual”, está sempre sujeito à capacidade do operador, ou seja, a correcta afinação de um instrumento através de um diapasão está sempre condicionada pela sensibilidade e capacidade de quem o utiliza. Cada vez mais a música atinge uma maior componente amadora, ou seja, actualmente assiste-se a uma crescente população de músicos amadores e inexperientes, cuja capacidade e sensibilidade para afinação são bastante reduzidas. Assim, um instrumento que apenas permite afinar um tom torna-se pouco prático e transportar um diapasão para afinar cada corda de uma guitarra, por exemplo, não é uma solução para o problema [14].

Com o objectivo de solucionar este problema e de otimizar a afinação de instrumentos musicais, surge em 1936 o primeiro afinador estroboscópico. Este equipamento, desenvolvido pela Conn Instruments, tinha como base de funcionamento a recente tecnologia dos estroboscópicos, Figura 2.18, aparelhos que utilizam feixes de luzes intermitentes para estudar o movimento em máquinas.

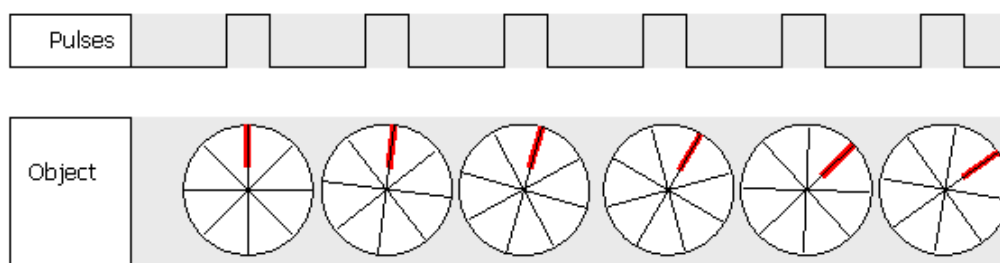


Figura 2.18 - esquema demonstrativo do funcionamento de um estroboscópio, in  
[“http://i46.tinypic.com/2nin20w.png”](http://i46.tinypic.com/2nin20w.png) consultado em 2015-08-11”

Nos afinadores deste tipo é conjugado o movimento de rotação de um motor, a uma determinada frequência, com uma luz estroboscópica. Na extremidade do motor é colocada uma imagem que permanece em rotação e é iluminada, intermitentemente, pela luz, cujo accionamento é coordenado pela frequência do som recebido do instrumento que se pretende afinar, Figura 2.19. Assim, a afinação consiste no ajuste do tom em causa para a sua frequência coincida com a frequência de rotação do motor, previamente estabelecida. Quando funcionam a frequências diferentes, a percepção humana do movimento da imagem sofre uma ilusão de óptica, podendo até parecer que se movimenta no sentido contrário mas, no caso das frequências se igualarem, a imagem parece estar, completamente, imobilizada [1].



Figura 2.19 - Exemplo de um afinador estroboscópico - Peterson 400, in  
 “<http://onlineguitartuner.co/wp-content/uploads/2014/11/Peterson400Tuner.png>  
 consultado em 2015-08-11”

A tecnologia estroboscópica ainda é bastante utilizada, principalmente pelo feedback óptico que proporciona ao utilizador, pois permite acompanhar as variações do movimento aparente da imagem durante todo o processo de afinação, o que facilita a sua utilização e optimiza os resultados. Contudo, dados os avanços tecnológicos testemunhados a partir do século 20, rapidamente surgiram novas soluções que vieram colocar estes equipamentos num plano secundário. Em 1964, a Peterson, empresa dedicada ao ramo electro-musical, introduz no mercado o primeiro afinador electrónico portátil, o Peterson 70, Figura 2.20, que deixava a tecnologia estroboscópica e servia-se de circuitos integrados de semicondutores e componentes passivos e de algoritmos computacionais dedicados ao estudo e processamento de sinais áudio.



Figura 2.20 - Peterson 70 (1964) - O primeiro modelo de afinador electrónico portátil, in  
 “<https://www.petersontuners.com/> consultado em 2015-08-11”

Desde então, estes novos modelos de afinadores electrónicos tomaram controlo do mercado, expandiram-se e evoluíram e, actualmente, existem inúmeras soluções distintas e, muitas vezes, direccionadas para satisfazer requisitos específicos (preço, ergonomia, durabilidade, fiabilidade, precisão, tamanho, peso, etc), Figuras 2.21 e 2.22. Cada vez mais se procura simplificar os equipamentos e adapta-los para facilitar a sua utilização e para que se tornem mais acessíveis para todos. Muitos dos mais recentes equipamentos orientados para a afinação de guitarras disponibilizam material para afinação automática, em que é o próprio afinador que se encarrega de interpretar o feedback recolhido e de transmitir essa informação a um motor que, por sua vez, ajusta a tensão das cordas para que atinjam o tom pretendido. Hoje, pode, inclusivamente, encontrar-se uma grande variedade de afinadores virtuais que utilizam o *hardware* de telemóveis ou de computadores pessoais, de forma a acompanhar o utilizador em qualquer altura, Figura 2.24. Os afinadores polifónicos são equipamentos capazes de interpretar os sinais como um conjunto de diferentes componentes e, como tal, conseguem dissociá-los e interpretar cada um, individualmente. Esta tecnologia tem vindo a ser alvo de grandes avanços e, veio introduzir no mercado novas soluções entusiasmantes, Figura 2.23, que possibilitam novos tipos de abordagem sobre a afinação de instrumentos [1].



Figura 2.22 - Afinador de pinça e ecrã LED - Korg Pitchclip, in  
 “[http://static.mundomax.com.br/image/afinador\\_d\\_e\\_clipe\\_pitchclip\\_pc1\\_preto\\_korg--47056\\_2000\\_001.jpg](http://static.mundomax.com.br/image/afinador_d_e_clipe_pitchclip_pc1_preto_korg--47056_2000_001.jpg) consultado em 2015-08-11”



Figura 2.21 - Afinador electrónico de ponteiro - Boss TU-80, in  
 “[http://www.rolandindonesia.co.id/images/produk/besar/produk\\_TU-8086785163.jpg](http://www.rolandindonesia.co.id/images/produk/besar/produk_TU-8086785163.jpg) consultado em 2015-08-11”



Figura 2.23 - Afinador polifónico de pedal - TC Electronic Polytune2, in  
 “<http://frontman.cz/sites/default/files/tce-polytune2mini3.jpg> consultado em 2015-08-11”



Figura 2.24 - Afinador automático portátil com aplicação para dispositivos móveis - Roadie, in  
 “<https://s-media-cache-ak0.pinimg.com/736x/38/3d/f0/383df01b9a30708c440c27e5fafa3247.jpg> consultado em 2015-08-11”

Neste momento, depois de estabelecida uma contextualização inicial relativa aos diferentes elementos que intervêm na temática principal deste trabalho, é possível concluir, em primeiro lugar, que existem sons musicais (harmónicos) e sons desagradáveis (ruído) e um dos principais factores responsáveis por esta distinção é o seu conteúdo frequencial, ou harmónico. Os instrumentos musicais, como a guitarra, são concebidos de forma a que o produto sonoro que originam represente um sinal cujas componentes frequenciais se relacionam de uma forma bem definida e decifrável, constituindo uma série harmónica. O funcionamento de um afinador electrónico baseia-se, sobretudo, numa análise desta série, cujas características, como a sua frequência fundamental, estão directamente relacionadas com a tonalidade do sinal em estudo. Actualmente, existem diversas soluções, electrónicas e digitais, para a afinação de instrumentos, o que nem sempre foi uma realidade. Cada vez mais, os avanços tecnológicos permitem chegar a novos equipamentos que procuram simplificar, de todas as formas possíveis, a afinação de instrumentos e a própria relação entre o instrumento e o seu utilizador.



## 3 Processamento de Sinais Digitais (DSP)

Depois de compreender o contexto em que são utilizados os afinadores, em que condições funcionam e qual o seu objecto de análise, é importante, nesta fase, esclarecer quais as bases científicas que permitem que o afinador desempenhe a sua função, ou seja, conhecer as técnicas e os recursos teóricos que o fundamentam. Para tal, numa primeira instância é relevante introduzir o conceito de Processamento digital de sinais (DSP), qual a sua origem e qual a sua área de aplicação. Neste capítulo são, também, introduzidas algumas técnicas e alguns conceitos relacionados com o DSP e que se revelaram importantes para o percurso tomado neste trabalho, nomeadamente, para desenvolvimento do produto final.

### 3.1 Introdução ao DSP

O Processamento digital de sinais (DSP) é uma das áreas científicas e tecnológicas que mais se tem desenvolvido nos últimos anos. As suas raízes, não muito antigas, estendem-se até aos finais dos anos 60, e seguem com o aparecimento dos primeiros computadores digitais, aparelhos extremamente dispendiosos, acessíveis a uma reduzida porção da população. Assim, surgiram os primeiros grandes avanços no ramo, com a sua aplicação em matérias de elevada importância como a medicina e as indústrias petrolífera e aeroespacial. Contudo, com a chegada do final dos anos 80, o computador tornou-se num equipamento pessoal e acessível para o uso comum, o que possibilitou a expansão do DSP para novas aplicações, Figura 3.1. Desta forma, a evolução do processamento digital de sinais mudou a sua rota, afastando-se de áreas militares e governamentais e aproximando-se do mercado comercial. Desde então, esta tecnologia chegou ao público sob a forma de diversos produtos de uso diário como telemóveis, leitores de CD ou sistemas de *voice mail*.



Figura 3.1 - Exemplos de aplicações de DSP em áreas distintas (adaptado de [2])

A indústria musical também foi intensamente afectada pela evolução das técnicas de processamento digital de sinais, não só ao nível tecnológico e electrónico mas também nas áreas comerciais. O DSP permitiu substituir uma grande parte de soluções analógicas por equipamentos digitais de alto rendimento, como por exemplo as *Digital Audio Workstations* (DAW), os afinadores digitais ou o *Compact Disk*. Hoje, a grande maioria dos processos relativos a gravação, produção, edição e mistura de áudio estão dependentes das técnicas de processamento digital de sinais disponíveis e, a sua evolução tem-se mostrado, praticamente, paralela [4].

Tendo em consideração os objectivos e os fundamentos do presente trabalho, neste capítulo pretende-se introduzir alguns conceitos e técnicas importantes para que seja possível a compreensão do percurso adoptado e o produto final desenvolvido.

## 3.2 Análise de Fourier

A análise de Fourier é um processo matemático que tem como objectivo a simplificação de funções gerais, traduzindo-as ou aproximando-as através da soma de funções trigonométricas mais simples, as sinusóides, Figura 3.2. Esta metodologia foi introduzida em 1807 por Joseph Fourier, matemático e físico de origem francesa, que procurava simplificar o estudo da transferência de calor entre corpos, afirmando que qualquer sinal contínuo e periódico podia ser decomposto numa soma de sinusóides simples [15].

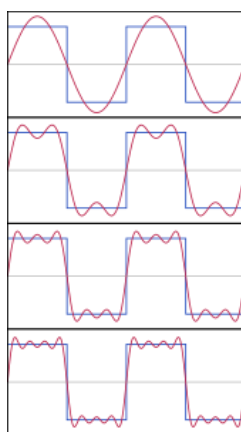


Figura 3.2 - Esquema das primeiras quatro somas sinusoidais de uma função quadrado, in “[http://en.academic.ru/pictures/enwiki/70/Fourier\\_Series.svg](http://en.academic.ru/pictures/enwiki/70/Fourier_Series.svg) consultado em 2015-08-11”

Apesar desta teoria tão controversa apresentar algumas lacunas, a verdade é que provou ser um grande avanço matemático à data e, depois de corrigida e aperfeiçoada, cada vez mais se comprovou o seu potencial contributo científico [16].

Desde a sua primeira introdução, como série de ondas sinusoidais, esta análise continuou a ser explorada e desenvolvida e, hoje é utilizada em diversos ramos e revela ser muito útil em áreas como a acústica, a estatística ou o processamento de som e imagem. Deste estudo mais aprofundado surgiram novas perspectivas e novas técnicas que ajudaram a simplificar a análise de diferentes situações, como é o caso das transformadas de Fourier.

### 3.2.1 Transformadas de Fourier

Em matemática, uma transformada é uma transformação que permite, partindo de uma função inicial, obter uma nova função dependente de outra variável, Figura 3.3. Uma forma mais simplista e fácil de compreender este conceito é fazendo a analogia com uma função. Uma função não é mais do que um bloco operacional que transforma um valor noutro valor. Uma transformada é apenas uma extensão desta interpretação para casos em que os valores de entrada e saída são, na verdade, funções que correspondem a um conjunto variado de valores [2]. Neste trabalho, esta transformação é utilizada com o objectivo de possibilitar a análise de um sinal, recebido sob a forma de uma função na base temporal, numa base de frequências. Este é um passo crucial no estudo de uma onda sonora, uma vez que, mantendo os princípios de simplificação da análise de Fourier, permite a sua decomposição e a consequente leitura dos elementos básicos que a constituem e suas propriedades.

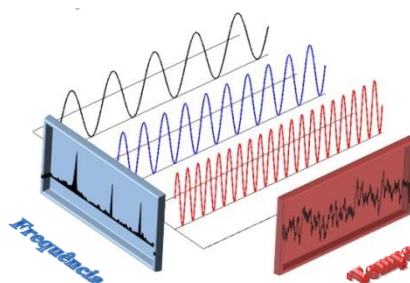


Figura 3.3 - Esquema exemplificativo da decomposição conduzida pela transformada de Fourier, in “<http://groups.csail.mit.edu/netmit/wordpress/wp-content/themes/netmit/images/sFFT.png> consultado em 2015-08-11”

De um modo geral, a Transformada de Fourier pode ser dividida em quatro categorias diferentes, de acordo com as propriedades do sinal em estudo:

#### Sinais Contínuos e aperiódicos

São sinais definidos em todos os instantes entre os infinitos, negativo e positivo, que não apresentam uma repetição definida e constante em todo o seu domínio. Um exemplo deste tipo de sinal é a função de Gauss, utilizada na descrição de distribuições normais. A Transformada de Fourier deste tipo de funções é, simplesmente denominada, Transformada de Fourier:

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.1)$$

Onde,

$X(w)$ , é o sinal no domínio de frequências;  
 $x(t)$ , representa o sinal no domínio temporal;  
 $t$ , indica um determinado instante de tempo;  
 $w$ . é a frequência em *rad*.

## Sinais Contínuos e periódicos

A diferença entre este tipo de sinal e o anterior é, unicamente, a sua periodicidade. Neste caso, a função é repetida ao longo de um domínio infinito segundo um período,  $T$ , definido e constante. Sinusóides simples como as funções seno e cosseno são exemplos concretos que apresentam estas características. Neste caso, a transformação é conseguida através de uma simples análise baseada na Série de Fourier:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \quad (3.2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) dt$$

## Sinais Discretos e aperiódicos

Estes sinais estão apenas definidos em pontos discretos no seu domínio infinito e não se repetem periodicamente. A Transformada de Fourier aplicada a estes sinais é chamada de *Discrete Time Fourier Transform* (DTFT) e toma a seguinte forma:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n} \quad (3.3)$$

Onde,

$N$ , corresponde ao número total de amostras do sinal de entrada.



## Sinais Discretos e periódicos

Correspondem a sinais que se repetem segundo um domínio de pontos definidos, entre infinitos, e um período fixo (T). Esta classe de transformada, embora também possa ser chamada de Série Discreta de Fourier, é geralmente denominada Transformada Discreta de Fourier:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad (3.4)$$

Onde,

$k$ , corresponde a um determinado índice de frequência da transformada

Na Figura 3.4 está sintetizada toda esta informação sobre a diferenciação entre as transformadas e os tipos de sinais associados a cada procedimento.





Tipo de Transformada	Exemplo de Sinal
Transformada de Fourier	
Série de Fourier	
DTFT	
DFT	

Figura 3.4 – Quadro síntese dos 4 tipos de transformadas de Fourier e respectivos exemplos de sinais de entrada. [2]

Estas quatro categorias, apesar das diferenças apresentadas, representam, todas, sinais de domínio infinito  $[-\infty, +\infty]$ . Infelizmente, esta condição revela-se um problema na computorização destas análises, uma vez que os computadores apenas conseguem processar informação discreta e de comprimento finito. As sinusóides são ondas, por definição, que se estendem infinitamente e é impossível sintetizar algo de domínio finito, partindo de um conjunto de elementos infinitos e vice-versa [2].

Então, uma vez que os computadores apenas gravam e analisam conjuntos de dados de tamanho definido, a forma encontrada para contornar este obstáculo é, na verdade, bastante simples: basta fazer com que um conjunto de dados finito, pareça infinito. Isto é conseguido, considerando que existe uma infinidade de pontos à esquerda e à direita do verdadeiro conjunto de dados que se pretende analisar, em que todos estes pontos adicionais tomam o

valor nulo. Este procedimento é conhecido como *zero padding* e é uma técnica, recente, bastante utilizada no processamento de sinais [7]. Assim, é possível transformar um sinal discreto finito num sinal discreto aperiódico, tornando possível a aplicação da *Discrete Time Fourier Transform*. Nas Figuras 3.5 e 3.6 está exemplificada a aplicação e o resultado obtido pelo *zero padding*.

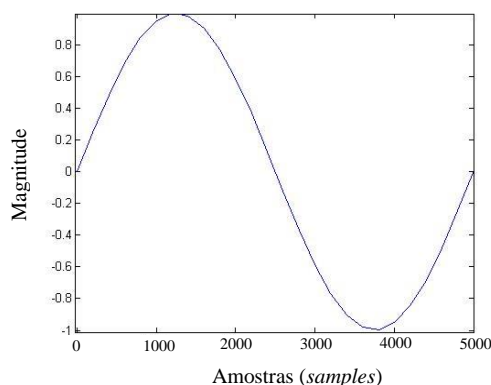


Figura 3.5 - Exemplo de um sinal

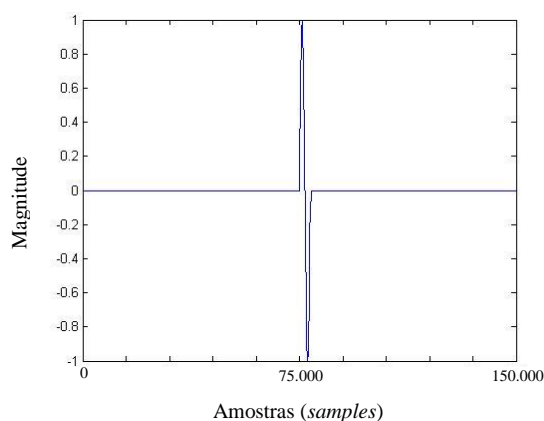


Figura 3.6 – Sinal obtido depois de aplicado o *zero padding*

Uma outra alternativa passa por, no lugar de adicionar zeros ao sinal, duplicá-lo consecutivamente, Figura 3.7. Neste caso, o sinal aparenta ser discreto e periódico em que o período é igual ao número de *samples* (amostras) original, ou seja, o sinal repete-se infinitamente com uma cadência igual ao seu comprimento inicial. Assim, em detrimento do uso da DTFT, torna-se aplicável a DFT.

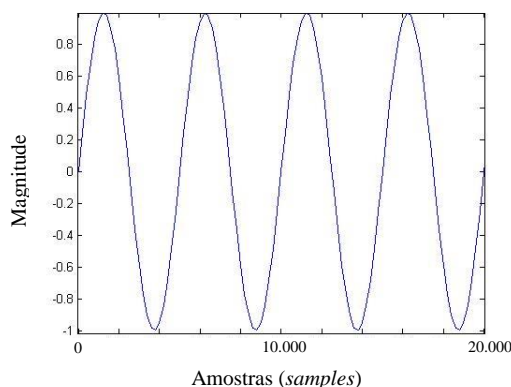


Figura 3.5 - Amostra parcial do sinal repetido periodicamente

Ao estudar estas duas alternativas verifica-se que é necessária uma infinidade de sinusóides para sintetizar um sinal aperiódico, o que impossibilita que esta análise seja conduzida por um algoritmo computacional, ou seja, inviabiliza o uso da DTFT. Consequentemente, por exclusão de partes, conclui-se que a única forma de análise de Fourier possível no processamento digital de sinais por computador, é utilizando a DFT [2].

### 3.2.2 Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Tal como foi explicado, a Transformada Discreta de Fourier resultada análise de Fourier sobre um sinal discreto e periódico e, a sua função é transformar o sinal inicial, do domínio temporal para o domínio frequencial (*Forward DFT*), ou vice-versa (*Inverse DFT*). Quer seja representado num referencial ou noutro, o sinal mantém-se inalterado, ou seja, a informação que ele transporta é a mesma, apenas apresentada numa forma diferente.

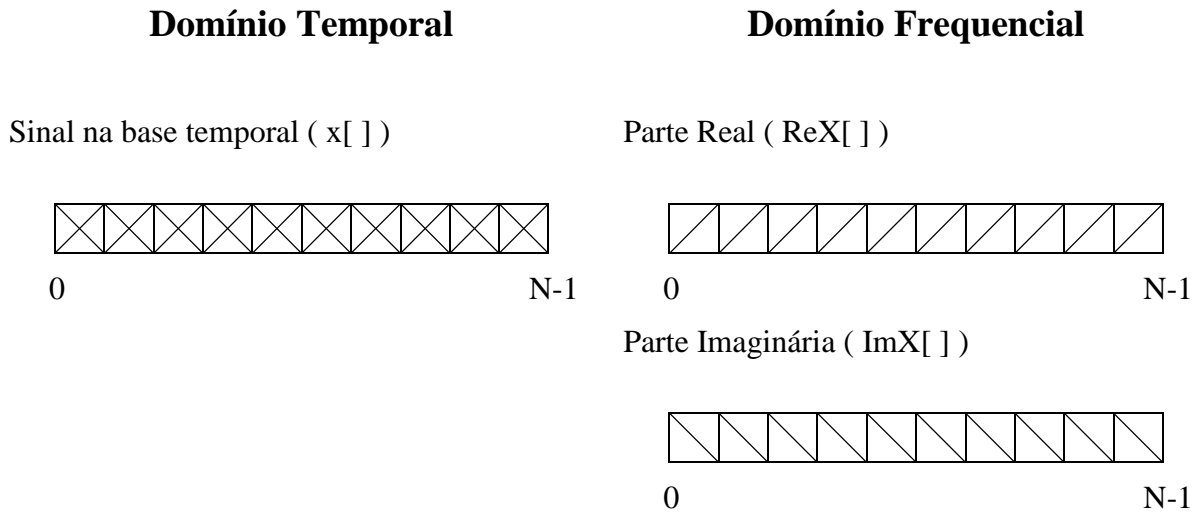


Figura 3.6 - Esquema da decomposição provocada pela DFT (adaptado de [2])

No domínio temporal discreto, o sinal  $x[ ]$  é composto por  $N$  pontos, de 0 a  $N-1$ , e quando transformado para o domínio de frequências a variável correspondente,  $X[ ]$ , é decomposta em dois conjuntos de dimensão  $N$ ,  $\text{Re}X[ ]$  e  $\text{Im}X[ ]$ . A parte real,  $\text{Re}X[ ]$ , é constituída pelas amplitudes das ondas coseno que compõem o sinal e a parte imaginária,  $\text{Im}X[ ]$ , pelas amplitudes das ondas seno. Estas sinusóides, cujas amplitudes formam o sinal de saída,  $X[ ]$ , são obtidas a partir de ondas seno e coseno unitárias, conhecidas por funções base e dadas por:

$$c_k[n] = \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad (3.4)$$

$$s_k[n] = \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad (3.5)$$

Onde,

$s_k[n]$  e  $c_k[n]$  correspondem a ondas seno e coseno, respectivamente;  
 $n$ , corresponde ao índice temporal e desenvolve-se de 0 a  $N-1$ .

Sabendo que o *output* da DFT é um conjunto de amplitudes e respectivas fases e que as funções base que constituem o sinal são ondas seno e coseno unitárias, compreende-se que, associando cada amplitude, no domínio de frequências, às respectivas funções base, obtém-se o conjunto funções sinusoidais que, quando adicionadas, formam o sinal na base temporal:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \text{Re}X[k] \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \text{Im}X[k] \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad (3.6)$$

Tomando novamente a equação geral da DFT (Equação 3.4), pretende-se agora analisar o seu peso computacional, uma vez que todo o objectivo da sua abordagem neste trabalho é entender como se aplica no processamento automático de sinal. Para estudar este problema, é necessário entender o número de operações necessárias para calcular a DFT de um sinal de dimensão  $N$  [2].

Pode então observar-se que para determinar cada ponto  $X[k]$ , na base de frequências, são necessárias  $N$  multiplicações do tipo  $x[n]e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$ , uma vez que  $n$  assume valores inteiros entre 0 e  $N - 1$ . Como  $k$  também se desenvolve de 0 a  $N - 1$ , são necessárias  $N \times N = N^2$  operações para transformar o sinal discreto, da base temporal para a base de frequências. É importante notar que este não representa a quantidade real de operações mas apenas a sua ordem de grandeza, podendo esta ser escalada dependendo dos casos.

Para compreender o verdadeiro significado deste factor, tome-se como exemplo um sinal com  $N = 1000$  pontos a ser adquirido para digitalização a uma frequência de 1 kHz, ou seja, o equipamento consegue concretizar 1000 operações por segundo. Na aplicação da DFT são necessárias,  $N \times N = 10^6$ , operações o que, utilizando o mesmo equipamento de processamento, levaria 1000 segundos, aproximadamente 16 minutos. Assim, torna-se óbvio que, apesar da sua grande relevância e importância no processamento de sinais, a DFT, quando aplicado a sinais de grandes dimensões, apresenta-se muito lento e, consequentemente, pouco prático.

Para combater este problema, dada a importância que a DFT apresenta em diversas áreas, procurou encontrar-se novas formas e novos algoritmos de processar esta técnica, com o objectivo de melhorar a sua performance e de torna-la mais indicada para ser computadorizada. Existem, actualmente, três procedimentos diferentes utilizados para o cálculo da DFT: cálculo por equações simultâneas, por correlação e através da FFT [2].

No primeiro método, o problema é abordado como um caso algébrico típico em que existem  $N$  incógnitas no sistema (sendo  $N$  a dimensão do sinal de entrada) e são procuradas  $N$  equações para resolver cada uma das incógnitas. Para tal, é utilizada uma análise *sample a sample* em que, a soma do primeiro valor de  $\text{Re}X$  e de  $\text{Im}X$  corresponde à primeira *sample* do sinal em tempo discreto. Desta forma surge a primeira equação e consequentemente, a solução para o primeiro valor do sinal na base temporal. Repetindo o procedimento para os restantes pontos do sinal, obtém-se as restantes equações necessárias. Este método é de compreensão bastante simples e, apesar de exigir um enorme número de operações e, consequentemente, não ser aplicado virtualmente no cálculo da DFT, é bastante importante como prova de que é possível decompor um sinal em sinusóides [2].

O cálculo por correlação é bastante diferente e muito mais usado, sendo considerado o método *standard* para a utilização da DFT. Neste caso, o objectivo é estudar, uma a uma, a contribuição de cada sinusóide, de uma determinada frequência, no sinal de entrada. Para melhor compreensão, tome-se como exemplo o caso da Figura 3.9, em que se procura estudar a influência das sinusóides relativas a  $k = 3$  nos sinais  $x_1[ ]$  e  $x_2[ ]$ . O primeiro sinal,  $x_1[ ]$ , é composto por uma única onda seno que completa 3 ciclos de 0 a 63 ( $s_3$ ), ou seja, uma onda em que  $k=3$ . Já o sinal  $x_2[ ]$  é composto por várias sinusóides mas nenhum deles corresponde a  $s_3$ .

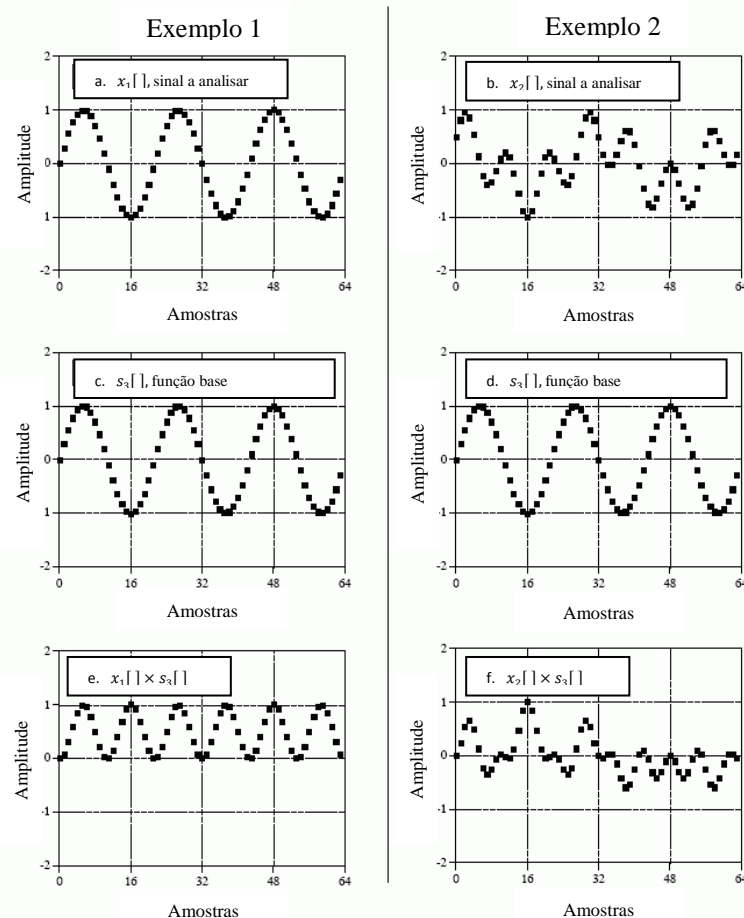


Figura 3.7- Exemplo de correlação de sinais em que se pretende estudar a presença da sinusóide  $s_3$  em dois sinais distintos,  $x_1$  e  $x_2$  [2].

Como se pôde observar, o produto de  $s_3$  por cada um dos sinais é muito diferente, o que vai resultar em outputs diferentes para o algoritmo. O passo seguinte será somar o valor de todos os pontos do sinal obtido e, assim, descobrir a amplitude da onda  $s_3$  presente em cada um dos inputs. Desta forma, para o primeiro caso, é simples de prever que do somatório se obtém um número positivo, logo, que a onda está presente no sinal de entrada.

Observando o resultado do segundo caso, a onda obtida parece desenvolver-se em torno de 0 e perspectiva-se que o somatório resulte no valor nulo, corroborando as informações fornecidas inicialmente sobre a inexistência de  $s_3$  em  $x_2$  [ ].

Este procedimento, repetido para cada valor de  $k$ , permite obter os valores de  $ReX[k]$  e de  $ImX[k]$  e, conseqüentemente, o sinal na base de frequências. É de notar que esta metodologia só é válida pois todas as funções base (seno e coseno) da DFT são ortogonais entre si, ou seja, a sua correlação é nula [2].

### 3.2.3 Transformada Rápida de Fourier (FFT)

A terceira e última técnica de cálculo da DFT é conhecida por Transformada Rápida de Fourier (FFT) e é, sem dúvida a mais eficiente e rápida. O desenvolvimento deste algoritmo teve origem ainda no século XIX como resultado dos estudos conduzidos por Gauss no domínio da astrologia, contudo, dada a incompatibilidade histórica em que foi concebido (inexistência de suporte tecnológico para comprovar a sua veracidade), não teve o impacto esperado na sociedade científica e particularmente caiu no esquecimento. De uma forma geral, o crédito do desenvolvimento da FFT é atribuído aos americanos Cooley e Tukey que, em 1965 introduziram o algoritmo para o cálculo rápido da DFT mais utilizado na actualidade [17].

A abordagem proposta por estes dois investigadores, numa primeira fase, incide sobre duas propriedades da DFT, ou mais concretamente, da equação de Euler: a simetria entre complexos conjugados e a periodicidade da equação em  $n$  e em  $k$ .

Considerando que:

$$W_N^{kn} = e^{\frac{-i2\pi nk}{N}} \quad (3.7)$$

e explorando as propriedades da função exponencial conclui-se que,

$$W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^* \quad (3.8)$$

onde,

$(W_N^{kn})^*$ , corresponde ao conjugado de  $W_N^{-kn}$ .

Como  $n$  e  $k$  representam valores inteiros, observa-se a periodicidade característica de  $W_N^{kn}$ :

$$W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n} \quad (3.9)$$

Atentando agora na equação da DFT geral e relacionando-a com a Equação 3.9, obtém-se uma simplificação que se revela muito útil nos passos seguintes, onde também serão utilizadas as propriedades acima referidas:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} , k = 0 \dots N - 1 \quad (3.10)$$

Mantendo estas breves noções, encontram-se reunidas as condições para se iniciar uma resumida explicação do funcionamento da FFT. O primeiro passo consiste em separar o somatório de  $n$  em duas séries de igual dimensão, uma para os índices pares e outra para os ímpares:

$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] W_N^{k2r} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1] W_N^{k(2r+1)} \quad (3.11)$$

Repare-se que para o somatório dos índices pares, substituiu-se  $n$  por  $2r$  e na série ímpar,  $n$  por  $2r+1$ . Manipulando os termos da Equação 3.11 obtém-se:

$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] (W_N^2)^{kr} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1] (W_N^2)^{kr} \quad (3.12)$$

Como:

$$W_N^2 = e^{\frac{-i2\pi}{N}2} = e^{\frac{-i2\pi}{\left(\frac{N}{2}\right)}} = W_{N/2} \quad (3.13)$$

Então pode obter-se:

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] W_{N/2}^{kr} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1] W_{N/2}^{kr} \\ &\Leftrightarrow X[k] = E_k + W_N^k O_k \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$E_k = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] W_{N/2}^{kr} \quad (3.15)$$

$$O_k = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1] W_{N/2}^{kr} \quad (3.16)$$

Assim, verifica-se que, separando o conjunto das amostras de entrada em dois novos, de iguais dimensões, se transforma um problema de uma DFT em duas com metade do tamanho inicial. Resta, então, analisar qual a vantagem desta decomposição para o processo de cálculo pretendido e, para tal, deve estudar-se a exigência de operações da nova expressão.

Para cada DFT obtida, sabendo que estas são periódicas em  $N/2$ , tem-se que:

$$E_{k+\frac{N}{2}} = E_k \quad (3.17)$$

$$O_{k+\frac{N}{2}} = O_k \quad (3.18)$$

Então, pode reescrever-se a expressão para  $X[k]$  como:

$$X[k] = \begin{cases} E_k + W_N^k O_k & , \quad 0 \leq k < N/2 \\ E_{k+\frac{N}{2}} + W_N^{k+\frac{N}{2}} O_{k+\frac{N}{2}} & , \quad N/2 \leq k < N \end{cases} \quad (3.19)$$

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} \Leftrightarrow -W_N^k \quad (3.20)$$

Assim, é possível reduzir a análise do conjunto de  $k$  para metade,  $k = 0 \dots N/2$ , da seguinte forma:

$$X_k = E_k + W_N^k O_k \quad (3.21)$$



$$X_{k+\frac{N}{2}} = E_k - W_N^k O_k \quad (3.22)$$

Como visto anteriormente, o cálculo da DFT de forma directa, sendo  $N$  a dimensão do sinal de entrada, representa um problema aritmético de ordem  $N^2$ ,  $O(N^2)$ . Adoptando esta nova abordagem e utilizando o algoritmo da FFT reduziu-se o problema a dois somatórios de  $N/2$  elementos, para o cálculo de cada  $X_k$ , sendo que  $k = 0 \dots N/2$ , dada a periodicidade da DFT. Em acréscimo, também serão necessárias  $N$  multiplicações relativas ao factor de fase,  $W_N^k$ , o que resulta num problema de ordem igual a  $2\left(\frac{N}{2}\right)^2 + N = \frac{N^2}{2} + N$ .

Numa primeira análise, este resultado não aparenta ser muito significativo mas, dando continuidade observa-se uma realidade bastante diferente. Partindo dos dois novos conjuntos, agora sujeitos à DFT, pode repetir-se o processo, ou seja, voltar a dividir cada subconjunto em dois, de forma sequencial [2].

Tabela 3.1 - Evolução do algoritmo da FFT e respectivo custo operacional (adaptado de [17])

Número de subdivisões	Dimensão dos subconjuntos	Custo operacional
<b>1</b>	$N/2$	$2\left(\frac{N}{2}\right)^2 + N = \frac{N^2}{2} + N$
<b>2</b>	$N/4$	$2\left(2\left(\frac{N}{4}\right)^2 + \frac{N}{2}\right) + N = \frac{N^2}{4} + 2N$
<b>3</b>	$N/8$	$2\left[2\left(2\left(\frac{N}{8}\right)^2 + \frac{N}{4}\right) + \frac{N}{2}\right] + N = \frac{N^2}{8} + 3N$
...	...	...
<b>p</b>	$N/2^p = 1$	$\frac{N^2}{2^p} + pN = N + N \log_2 N$

Como se pode observar na Tabela 3.1, esta técnica pode ser repetida  $p$  vezes, em que  $p = \log_2 N$  e, com a evolução de patamares, observa-se que este problema é caracterizado por uma regressão logarítmica de ordem  $O(N \log_2 N)$ . É de notar a importância do valor  $N$  adoptado para o domínio de cálculo, uma vez que para que  $p$  corresponda a um número inteiro de patamares,  $N$  tem de ser uma potência de 2 (p.e, 512, 1024, 2048). Assim, torna-se muito mais clara a grande vantagem deste algoritmo perante as suas alternativas. Na Tabela 3.2 estão representados o número de operações complexas necessárias para efectuar a DFT de forma directa em comparação com a utilização da FFT [2].

Tabela 3.2 - Comparação entre custos operacionais do calculo da DFT de forma directa e pela FFT

N	$10^3$	$10^6$	$10^9$
<b>DFT, <math>O(N^2)</math></b>	$10^6$	$10^{12}$	$10^{18}$

FFT, $O(N \log_2 N)$	$10^4$	$2 \times 10^7$	$3 \times 10^{10}$
----------------------	--------	-----------------	--------------------

### 3.3 Análise tonal de um sinal áudio

No âmbito do processamento de sinais áudio, o estudo da tonalidade (*pitch*) permanece ao longo dos tempos como um dos principais desafios. De forma crescente, vão surgindo novas aplicações que se servem da análise tonal de um determinado sinal para recolher informações valiosas sobre o mesmo e que, posteriormente, podem ser utilizadas para integrar diversas soluções importantes para a afinação de instrumentos, aplicações de comandos por voz, funções para *software* de áudio digital, programas de composição musical virtual, entre outros.

Todas estas aplicações podem ser agrupadas em dois grandes grupos com exigências de processamento bem distintas: a análise de discurso e da fala ou a análise em contexto musical. O presente capítulo tem como objectivo focar este segundo grupo, pois é neste que se insere o tema principal do trabalho.

#### 3.3.1 Tonalidade

Tonalidade, ou sensação de altura tonal, é uma componente sensorial que permite ao Homem classificar os sons de acordo com a sua altura, segundo uma escala relativa de frequências. No fundo, é esta propriedade perceptual que permite definir um som como agudo ou grave relativamente a outros. Tonalidade e altura de um som são conceitos que, não devem ser confundidos com a sua frequência ou frequência fundamental do sinal, apesar de estarem proximamente relacionados. Enquanto a frequência representa uma característica física, científica, objectiva e mensurável, a tonalidade é um conceito psicoacústico, subjectivo, associado à percepção, de cada indivíduo, de um determinado som, nomeadamente, da sua frequência.

Contudo, e tal como enunciado no início deste capítulo, o estudo da tonalidade não é uma tarefa simples e, na grande maioria das situações, acaba por se cingir apenas à análise de frequências, ou seja, o estudo limita-se à componente acústica e deixa de parte a sua componente psicológica. Nos restantes temas abordados neste relatório o problema será explorado desta mesma forma, ou seja, a análise tonal mencionada representará apenas uma determinação da frequência fundamental que caracteriza cada sinal, uma vez que, para o fim desejado, esta simplificação é suficiente e, simultaneamente, simplifica todo o trabalho [18].

#### 3.3.2 Análise monofónica vs polifónica

No ramo do processamento de sinais áudio, a análise tonal, baseada na estimação da frequência fundamental, pode ser dividida em dois problemas globais: a análise monofónica, ou *single-pitch*, e a análise polifónica, ou *multi-pitch*. Estas duas categorias, apesar de partilharem a mesma base ideológica, estimar a frequência fundamental de um determinado sinal áudio, diferem bastante na complexidade e abordagem ao problema. Enquanto a primeira analisa a tonalidade do sinal de uma forma global e uniforme, procurando estimar o tom dominante no sinal de uma forma homogénea, o estudo polifónico procura interpretar os

diferentes contributos tonais individualmente, ou seja, estuda a frequência característica de cada serie harmónica presente no sinal [19].

O método *single-pitch*, por ser mais simples e prático, é o mais utilizado na maioria das aplicações no âmbito do processamento de sinais áudio, quer na variante musical ou de análise de discurso. Equipamentos como afinadores e sistemas de comando por voz, utilizados em grande escala por todo o planeta, servem-se, maioritariamente, deste modelo de análise tonal. Esta abordagem, tal como o nome indica, assume uma perspectiva monofónica sobre o sinal áudio, ou seja, estuda-o como se todos os sons presentes tivessem a mesma origem, sendo que todos contribuem para uma única imagem sonora, caracterizada por uma só série harmónica característica.

Já a abordagem *multi-pitch*, apresenta-se como um problema complexo e pouco desenvolvido, que apenas nos últimos anos foi alvo de estudos mais profundos e dedicados. O cenário polifónico surge muito regularmente em contexto musical, talvez até seja mais frequente que o monofónico, e também no processamento de discurso. Normalmente, esta situação ocorre quando existem vários instrumentos, ou vozes a produzir informação, simultaneamente, ou quando um instrumento produz diferentes tons ao mesmo tempo.

Actualmente, a análise polifónica desempenha um papel muito importante em tarefas como a transcrição musical automática, na separação de fontes áudio e na extracção melódica de sinais. Paralelamente, este método tem vindo a ser introduzido no mercado dos afinadores, de forma a solucionar problemas de afinação em tempo real, permitindo a afinação simultânea de diferentes tons provenientes do mesmo instrumento [19].

### 3.4 Algoritmos de análise tonal

Os algoritmos de *pitch detection*, como foi referido, têm por objectivo estimar, com o maior grau de certeza possível, a frequência fundamental de um determinado sinal. Contudo, esta análise não tem, necessariamente, de ser conduzida partindo do espectro de frequências do sinal e pode ser aplicada a um sinal no formato em que é captado, sem necessitar de transformações prévias.

Estas técnicas baseiam-se, sobretudo, na análise de períodos de onda em detrimento das frequências mas, uma vez que estas características estão relacionadas, é possível traduzir os resultados e obter informações que permitam estudar a tonalidade de um som. Nesta secção serão enunciadas duas das técnicas mais utilizadas no processamento de áudio musical e que adoptam esta abordagem temporal [20].

#### 3.4.1 Função de Autocorrelação (ACF)

No processamento digital de sinais, as funções de correlação simbolizam uma medida de similaridade que permite comparar dois sinais. A função de autocorrelação, ACF, estuda a semelhança de um sinal com ele próprio, servindo-se de uma correlação cruzada entre o sinal original e uma versão desfasada no tempo. Isto é, cada elemento de um sinal original é multiplicado pelo sinal desfasado e, os valores obtidos são somados de forma a obter um único coeficiente de autocorrelação do sinal, Figura 3.10. A expressão para a autocorrelação de um sinal geral discreto pode ser simplificada na forma:

$$r(\tau) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i x_{i+\tau} \quad (3.23)$$

Se o sinal de entrada,  $x(t)$ , for periódico segundo  $p$ , então  $x_i = x_{i+p}$ . Assim, a função de autocorrelação vai apresentar valores máximos em múltiplos de  $p$ , ou seja quando  $\tau = kp$ , em que  $k$  representa um número inteiro e  $r(\tau)$  vai corresponder a um máximo local. É importante reter que a autocorrelação também apresenta um máximo local em  $\tau = 0$ , ou seja, quando o desfasamento dos sinais é nulo.

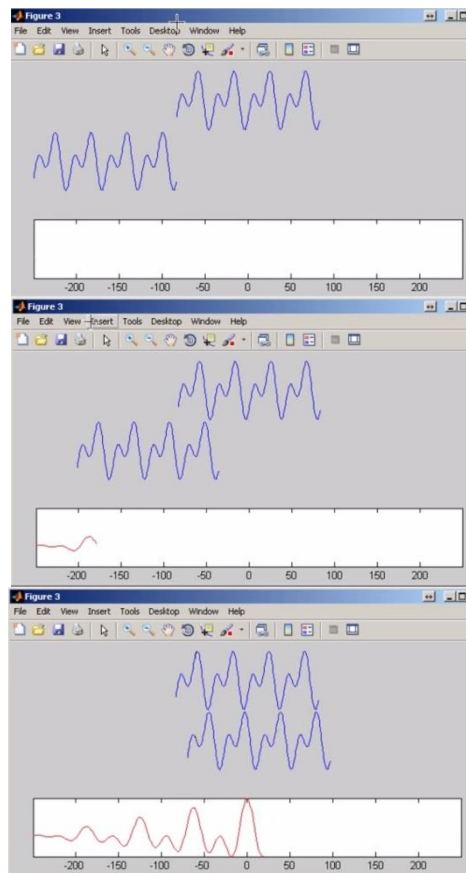


Figura 3.8 - Imagem representativa da autocorrelação de um sinal. O sinal é comparado com uma versão sua, desfasada. Registrando valores de correlação para cada desfasamento, obtém-se a função de autocorrelação, que é máxima quando o desfasamento é nulo.

No caso da janela do sinal estudado apresentar, pelo menos, dois períodos completos, é possível utilizar esta técnica para determinar a frequência fundamental do sinal. Isto é conseguido através da análise da periodicidade dos máximos obtidos na função de autocorrelação, uma vez que, numa função periódica, a função será, localmente, máxima sempre que os períodos se alinharem. Assim, verificando a distância entre dois máximos locais consecutivos, o valor obtido representa o período fundamental,  $T_0$ , da onda, cuja inversão permite obter um valor estimado da frequência fundamental.

Este método, embora permita obter resultados com resoluções interessantes, apresenta algumas debilidades que devem ser tidas em consideração. Em primeiro lugar, o elevado número de operações complexas (multiplicações) necessárias podem significar um peso

computacional muito acentuado, quando aplicado a conjuntos de dados muito extensos. Quando aplicado a sinais com componentes de frequências elevadas, apresenta, frequentemente, erros de interpretação e de oitava indesejáveis, bem como uma elevada sensibilidade a ruídos externos. Contudo, dada a sua simples implementação, é uma técnica bastante utilizada em aplicações de reconhecimento de voz, em que a gama de frequências em análise é bastante limitada [20].

### 3.4.2 Função da Diferença Média de Magnitudes (AMDF)

A AMDF (*Average Magnitude Difference Function*) representa uma outra forma de análise da tonalidade de um sinal de áudio, ou da sua frequência fundamental, numa base temporal. As suas bases são muito semelhantes às da função de autocorrelação, uma vez que ambas pressupõem a determinação do período fundamental do sinal para depois estimar a  $F_0$ . A expressão da AMDF para sinais discretos é a seguinte:

$$AMDF(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |x(n) - x(n + \tau)| \quad (3.24)$$

Ao contrário da ACF, desta vez procura-se saber a diferença normalizada entre os valores do sinal separados pelo desfasamento,  $\tau$ , obtendo um valor do coeficiente AMDF para cada desfasamento. Quando  $\tau = kp$ , em que  $p$  corresponde ao período do sinal, a função obtida vai apresentar um mínimo local, uma vez que  $x(n) = x(n + kp)$ . Assim, analisando a distância entre os mínimos locais consecutivos da função AMDF, pode determinar-se o período fundamental,  $T_0$  e, conseqüentemente, a respectiva  $F_0$ .

A grande vantagem deste método relativamente ao anterior é a substituição de uma série de multiplicações por uma série de subtrações, o que reduz, acentuadamente, os custos operacionais do algoritmo resultando numa resposta muito mais rápida. A AMDF é muito utilizada em situações em que a análise em tempo real é crucial e, muitas vezes, suplanta as outras alternativas por ser extremamente simples de implementar. Contudo, algumas das fragilidades indicadas na ACF mantêm-se presentes, como por exemplo os problemas de oitava e a sensibilidade ao ruído [20, 21].

### 3.4.3 Produto Harmónico Espectral (HPS)

O HPS (*Harmonic Product Spectrum*) é um dos algoritmos mais utilizados para a estimação da frequência fundamental de um sinal e, contrariamente aos exemplos anteriores, este é considerado um método de *pitch detection* no domínio de frequências. O seu princípio de funcionamento consiste em medir a máxima coincidência harmónica em cada ponto do espectro de frequências do sinal. Pode observar-se de forma exemplificada as diferentes fases deste procedimento na Figura 3.11.

## Algoritmo HPS

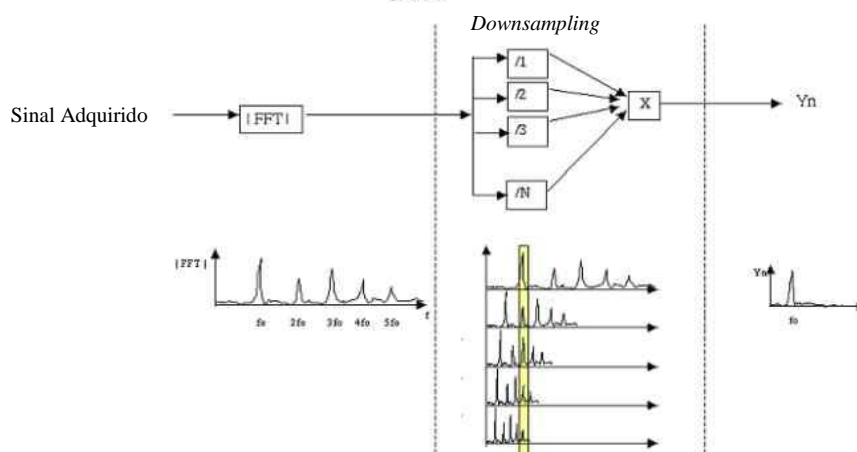


Figura 3.9 - Esquema da sequência de operações do HPS, in “<http://i.stack.imgur.com/Ccs0H.jpg> consultado em 2015-08-11”

O primeiro passo que a aplicação deste método pressupõe é a obtenção do espectro de frequências do sinal a analisar, nomeadamente, por intermédio da FFT. Este espectro dispõe da informação organizada e no formato necessário para que se possa continuar a desenvolver o algoritmo. De seguida é necessário estudar a contribuição harmónica de cada frequência presente no sinal, ou seja, no fundo, compreender se existe, ou não, alguma relação (harmónica) entre os diferentes componentes de frequência, mais intensos, detectados no espectro. Para tal, recorre-se a uma redução do domínio de amostragem do espectro de forma a fazer coincidir harmónicos da mesma série na mesma posição do espectro, processo conhecido por *downsampling*, Figuras 3.12 e 3.13 [20].

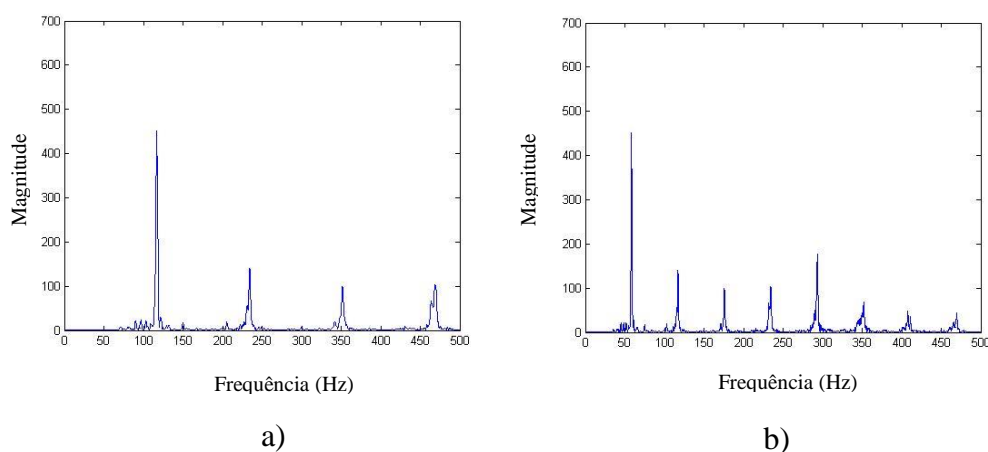


Figura 3.10 - Representação do espectro de frequências de um sinal, a) e do mesmo espectro com o período de amostragem reduzido para metade, b)

Desta forma, reduzindo o domínio de amostragem para metade do original consegue, facilmente, observar-se uma “deslocação” do espectro em que cada imagem corresponde a um objecto com metade do valor do seu objecto original. Repetindo o procedimento e diminuindo a amostragem para um quarto da original, recolhe-se um novo gráfico que corrobora as observações anteriores.

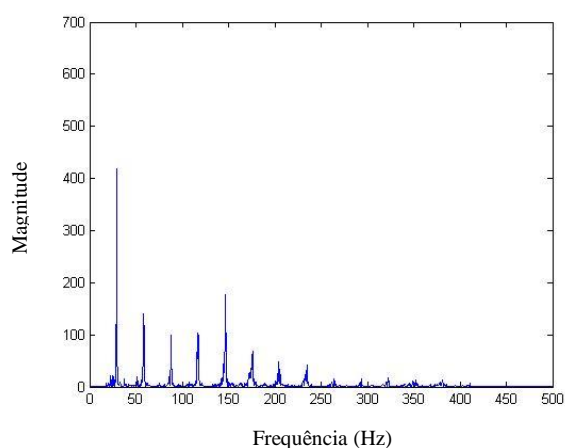


Figura 3.11 - Espectro resultante de uma redução do domínio de amostragem original para 1/4

Comparando os gráficos das Figuras 3.12 e 3.13 e fazendo uma análise meramente visual, torna-se clara a sobreposição de picos de intensidade em alguns valores de frequência e, de uma forma trivial, identifica-se uma progressão harmônica no sinal inicial.

Não esquecendo que o HPS se trata de um método para a estimação do valor da frequência fundamental de um sinal e que num som harmônico, as frequências que o compõem são múltiplos inteiros da sua  $F_0$ , resta utilizar os dados obtidos até ao momento de forma a que seja possível atingir esse mesmo objectivo. Então, o último passo consiste numa simples multiplicação dos sinais de domínio de amostragem diferentes para que, em cada ponto do domínio, o valor de intensidade represente produto entre as intensidades obtidas em cada sinal obtido, Figura 3.14 [20].

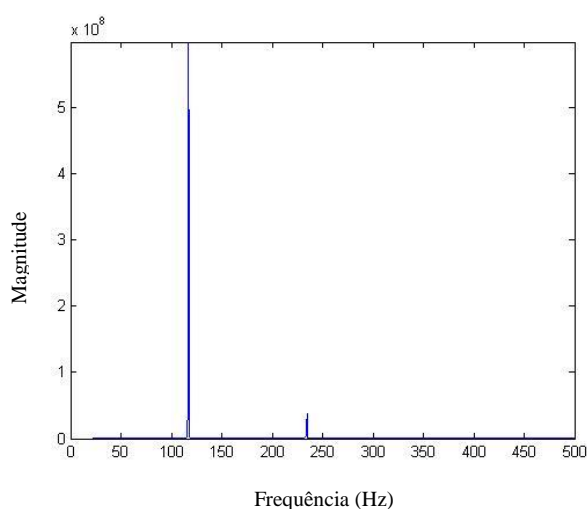


Figura 3.12 - Resultado espectral da aplicação do algoritmo HPS

Desta forma, pode concluir-se que o HPS representa uma forma muito simples, rápida e directa de estimar a  $F_0$ . É um método bastante preciso e fiável em aplicações no ramo da análise musical e que apresenta uma reduzida sensibilidade a ruídos, características de elevado interesse num afinador. Contudo, este procedimento apresenta algumas fragilidades que devem ser consideradas aquando da sua aplicação. A necessidade de reduzir sistematicamente a amostragem do sinal, reduz, na mesma proporção, a gama de frequências onde o algoritmo consegue identificar a  $F_0$ , ou seja, a gama de análise é tão extensa quanto o sinal de menor domínio obtido. Para além desta debilidade, o HPS apresenta, frequentemente, erros de oitava, isto é, a frequência fundamental estimada pelo algoritmo é, muitas vezes, imprecisa em proporções de 12 semitons, relativamente ao seu valor real. Contudo, esta última imperfeição pode, facilmente, resolver-se implementando algumas linhas de código simples [20].

#### 3.4.4 Cepstrum

O termo *Cepstrum* é o resultado da inversão da primeira sílaba da palavra *spectrum* e foi inicialmente introduzido por Bogert, Healy e Tukey, num trabalho que procurava analisar bandas de espectrograma de sinais sísmicos. O *Cepstrum* corresponde ao espectro do espectro logarítmico de um sinal e é definido como [22]:

$$C_p(\tau) = |\mathcal{F}\{\log(|\mathcal{F}(x)|^2)\}|^2 \quad (3.25)$$

onde:

$C_p$ , corresponde ao *cepstrum*;

$\mathcal{F}$ , indica a transformada de Fourier;

$x$ , corresponde ao sinal de entrada.

Como o objectivo do algoritmo é estudar a frequência do sinal, apenas é necessário guardar informações relativas à magnitude do espectro, sendo a sua fase desprezável, o que justifica o a aplicação do módulo aos resultados originados pelas transformada.

Considerando que o sinal original é harmónico, ao aplicar a FFT obtém-se um espectro onde estão visíveis as diferentes frequências que compõem a série harmónica que o caracteriza. Como também já foi explicado, numa série harmónica, todos os elementos correspondem a múltiplos inteiros da sua frequência fundamental, ou seja, duas frequências consecutivas são espaçadas por um intervalo correspondente ao valor da  $F_0$ . Então, analisando o espectro como se este se tratasse de um sinal áudio na base temporal, corrente, pode observar-se uma periodicidade clara em que se obtém um pico na função segundo um período igual a  $F_0$ . Assim, aplicando novamente a FFT ao espectro, obtém-se o denominado *cepstrum* no qual é visível um máximo enfatizado que representa a frequência fundamental do sinal. Esta técnica está exemplificada nas Figuras 3.15 a 3.17.



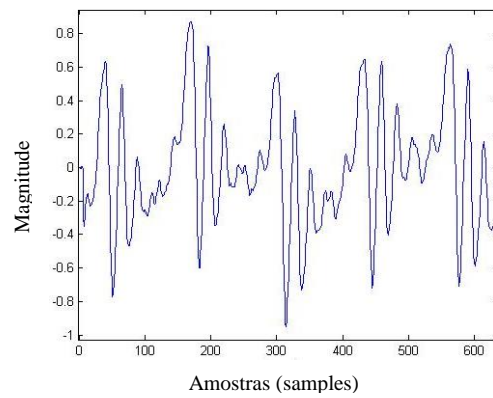


Figura 3.15 - Sinal harmónico original

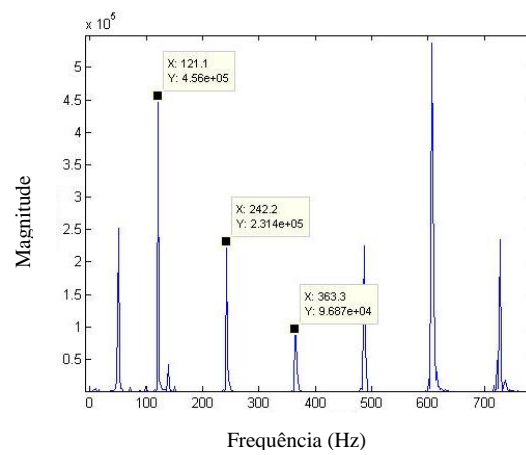


Figura 3.16 - Espectro obtido através da FFT do sinal. Pela análise dos pontos em destaque verifica-se uma periodicidade de "picos"

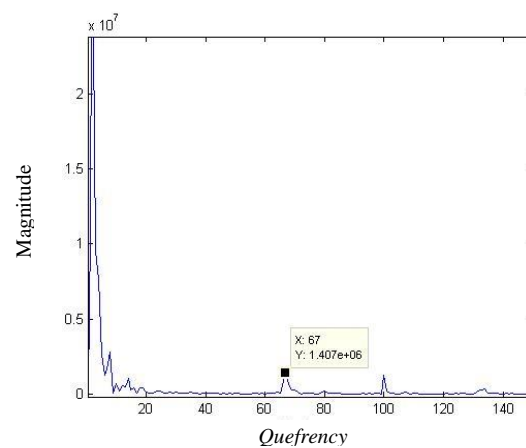


Figura 3.17 - Cepstrum do sinal

O *cepstrum* não apresenta um domínio de tempo nem de frequências, mas algo diferente que contém características de ambos e foi baptizado de *quefreny*. Contudo, é possível relacionar esta grandeza com a frequência do sinal segundo a seguinte expressão:

$$f = \frac{Fs}{q} \quad (3.26)$$

onde:

$Fs$ , corresponde à frequência de amostragem;

$q$ , representa a *quefreny*;

$f$ , representa frequência em Hz.

Assim, sabendo que o sinal original foi captado a 8192 Hz e partindo da *quefreny* correspondente ao primeiro pico do *cepstrum*, Figura 3.17, pode estimar-se um valor para a frequência fundamental tal que,  $F_0 = 8192/67 \approx 122.33 \text{ Hz}$

Este tipo de análise é bastante utilizada no processamento de sinais principalmente em aplicações de radares e em aparelhos de reconhecimento de voz, uma vez que permite uma fácil identificação de diferentes contribuições harmónicas no sinal, ou seja, simplifica o reconhecimento e a separação das diferentes fontes presentes [23].

Como ficou enfatizado neste capítulo, o processamento digital necessário para analisar a tonalidade de um sinal áudio é bastante complexo e pode ser conduzido de diversas maneiras, todas elas envolvendo um conjunto de técnicas e procedimentos específicos. Um sinal pode ser analisado na sua forma original, base temporal, ou pode ser transformado, para que o seu estudo possa ser dirigido numa base frequencial, através de uma análise de Fourier. Existem diferentes formas de abordar uma análise de Fourier e, neste capítulo, tornaram-se evidentes as vantagens operacionais da utilização de algoritmos como a Transformada Rápida de Fourier, relativamente aos métodos de cálculo directo. Sendo a função principal de um afinador identificar a tonalidade de um determinado som, foi explorado o conceito de tonalidade num contexto digital, onde se assume que a tonalidade e a frequência fundamental de um som são sinónimos, apesar desta relação não representar uma verdade absoluta. Partindo deste princípio, foram introduzidas algumas das técnicas mais utilizadas para estimar a frequência fundamental, ou a tonalidade, de um sinal. Abordagens na base temporal, como a Função de Autocorrelação ou a Função da Diferença Média de Magnitudes são bastante utilizadas dada a sua simples implementação, embora demonstrem fragilidades bastante significativas, nomeadamente, na presença de ruído exterior e apresentam, frequentemente, erros de oitava. Numa abordagem frequencial, foi introduzido o método do Produto Harmónico Espectral que, apesar de exigir uma maior cadeia de cálculo e de operações, permite obter resultados, não só mais precisos, mas muito menos susceptíveis a erros provocados por ruído. Por fim, foi introduzido o *Cepstrum*, um método que conjuga um pouco das duas abordagens e em que se procura obter um espectro do espectro de um sinal, em que a frequência fundamental é estimada a partir do seu correspondente período. Dadas as características de cada método apresentado e considerando os objectivos do presente projecto, o HPS mostrou reunir as condições mais favoráveis para dar seguimento ao trabalho e para que o produto final tenha a performance desejada, ou seja, uma análise, simultaneamente, rápida, eficiente e o mais simples possível.

## 4 Desenvolvimento de conceito e do produto

Concluída a apresentação e explicação de todo o *background* técnico e teórico que suportam este trabalho, neste novo capítulo será abordado o projecto desenvolvido de uma forma mais directa e objectiva. Materiais e métodos utilizados, problemas e resoluções encontradas e todas as decisões que resultaram no produto final desta tese de dissertação serão assuntos a explorar.

Como já foi referido, o objectivo principal deste projecto consiste na concepção integral de um *software* de afinação de instrumentos musicais, mais concretamente, de guitarras. Este desafio foi, desde sempre, encarado de forma a que o produto final apresentasse, não só, um bom desempenho e utilidade para o seu ramo de aplicação mas, também, que este representasse uma solução simples e de fácil compreensão ao nível da programação aplicada.

### 4.1 Hardware utilizado

Respeitando os princípios base para o projecto mencionados acima, o critério de selecção de *hardware* foi bastante amplo e nunca representou um real problema. Para além da necessidade de satisfazer as exigências do programa, a única preocupação presente ao longo do desenvolvimento do projecto, relativamente ao *hardware* utilizado, foi que este não representasse um condicionamento à sua aplicação, ou seja, sempre se procurou que o *software* fosse acessível a qualquer utilizador, de forma rápida e trivial.

Assim, todo o projecto foi desenvolvido utilizando, apenas, as capacidades e ferramentas disponíveis num vulgar computador portátil. No decorrer do projecto e na própria fase de teste do *software* foi utilizado um computador ASUS-K52N com as características apresentadas na tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Características do computador utilizado no projecto

<b>Processador</b>	AMD V140 2.3 GHz
<b>Sistema Operativo</b>	Windows 7 Home Premium 64bits
<b>Memória RAM</b>	4GB
<b>Placa Grafica</b>	ATI Mobility™ Radeon® HD4250
<b>Placa de Som</b>	Realtek High Definition Audio
<b>Microfone</b>	Built-in

No que diz respeito às características acima mencionadas, o *hardware* que poderia, de forma mais directa, condicionar o desempenho do algoritmo seriam o microfone, a placa de som e o processador. O microfone poderia ser um problema pois as suas características, que são desconhecidas, podiam limitar a capacidade de captação do som e o controlo do efeito do ruído, mas estas questões acabaram por não comprometer nem condicionar o produto final. A placa de som, tal como o microfone, desempenha um papel importante na capacidade de captação áudio do equipamento, tanto na sua qualidade como na velocidade de troca e conversão de dados. Já o processador, sendo o responsável máximo pela capacidade e velocidade de execução de rotinas e processamento de dados no computador, torna-se também crucial para o desempenho da aplicação desenvolvida.

## 4.2 Software desenvolvido

O trabalho aqui desenvolvido representa, maioritariamente, uma forma simples, prática e rápida de processar sinais áudio que se torna vantajosa na afinação de guitarras. Pretende-se que o *software* elaborado se apresente útil e que, simultaneamente, explore novas formas de abordar a temática da afinação de instrumentos, procurando sempre simplicidade nos processos e facilidade de acesso e utilização para o utilizador. Assim, a componente principal e central deste projecto é, sem dúvida, o algoritmo desenvolvido, que será explicado nos próximos parágrafos.

Inicialmente, foi necessário escolher a plataforma de programação onde o trabalho seria desenvolvido e, rapidamente, essa selecção caiu sobre o MatLab. Este *software*, altamente dedicado e especializado para o processamento de cálculos numéricos, também apresenta um leque vasto de ferramentas (pacotes de software) uteis ao processamento de sinais, logo, mostrou-se extremamente indicado para os objectivos do projecto. Adicionalmente, é uma ferramenta de processos simples e de programação bastante acessível e rápida, características que se adequam a um projecto que procura simplicidade no seu produto final, bem como a utilizadores inexperientes e que procuram, paralelamente ao desenvolvimento do trabalho, aprofundar conhecimentos ou adquirir novos conceitos sobre as temáticas abordadas.

De forma a possibilitar um acompanhamento mais fácil dos elementos de programação que compõem o código, pode dividir-se a sua estrutura em 3 etapas: a aquisição dos dados, o processamento e tratamento dos mesmos e, por último, a estimação da  $F_0$ .

### Aquisição de dados

Nesta primeira fase do programa, mostraram-se muito importantes as ferramentas disponibilizadas pela Data Acquisition Toolbox™ do Matlab. Esta ferramenta permite criar um objecto de entrada analógica compatível com a interface áudio do computador utilizado e assim, estabelecer um canal de aquisição (mono ou stereo) dos dados captados pelo microfone ou outra entrada de dados do equipamento. Para os efeitos deste trabalho, apenas foi necessário captar um canal mono, se bem que facilmente poderia ser expandido a multicanais, passando a explorar características muito mais ambiciosas e amplas sobre as características não só do sinal em si, mas também das características dos instrumentos e estados dos seus materiais constituintes.

```

Fs=16000;
ai=analoginput('winsound');
addchannel(ai,1);
set(ai,'SampleRate',Fs);

```

Figura 4.1 - Secção do código responsável por criar o canal de aquisição

O objecto criado armazena os dados como um vector e apresenta algumas propriedades que podem ser definidas de acordo com a performance que se pretende do mesmo. Nomeadamente, pode estabelecer-se uma frequência de aquisição, bem como limitar o número de dados recolhidos por cada momento de aquisição. A partir do momento em que o objecto e as ligações ao *hardware* estão definidas, este fica pronto a ser utilizado para proveito do programa, podendo ser usadas algumas instruções para controlar as suas tarefas e os seus comportamentos, mais concretamente, as funções *start* e *stop* para iniciar e parar a aquisição de dados, respectivamente.

### Tratamento do sinal adquirido

Imediatamente depois de ser recolhido, o sinal ainda não se encontra nas melhores condições para que o seu estudo seja tão preciso como desejado. Assim, é necessário trata-lo, removendo alguns ruídos e informações desnecessárias, para este trabalho, preparando os dados para que estes possam ser correctamente analisados.

Para começar, servindo-se da aplicação *Filter Builder*, são criados dois filtros para serem aplicados ao vector de dados e que permitem eliminar algumas informações que podem interferir com o bom funcionamento do programa. O primeiro é um filtro passa alto do tipo *butterworth* que elimina dados de frequências inferiores a 70 Hz, irrelevantes para a análise pretendida. Na tabela 4.2 estão descritas as principais características do filtro utilizado.

Tabela 4.2 - Características do filtro passa alto utilizado

<b>Frequência Stop-band</b>	50 Hz
<b>Frequência Pass-band</b>	70 Hz
<b>Frequência de amostragem</b>	16000 Hz
<b>Atenuação da Stop-band (dB)</b>	250 dB

O segundo consiste num filtro *band-stop*, também do tipo *butterworth*, que permite atenuar a influência das componentes do sinal de frequências em torno dos 100 Hz. Esta necessidade surge, principalmente do ruído causado pela alimentação do computador utilizado. A alimentação do equipamento é conduzida a, aproximadamente, 50 Hz, resultando numa manifestação harmónica intensa por volta dos 100 Hz. Assim, o objectivo deste filtro é ligeiramente diferente do anterior pois, este ruído está presente numa zona de interesse, o que implica que se procure apenas uma diminuição de intensidade proporcional ao ruído e não uma anulação completa da frequência em causa.

Tabela 4.3 - Características do filtro band-stop utilizado

<b>Primeira Frequência Pass-band</b>	98 Hz
<b>Primeira Frequência Stop-band</b>	99 Hz
<b>Segunda Frequência Stop-band</b>	101 Hz
<b>Segunda Frequência Pass-band</b>	102 Hz
<b>Frequência de amostragem</b>	16000 Hz
<b>Atenuação da Stop-band (dB)</b>	60 dB

### Windowing

Apesar da FFT representar uma grande vantagem no estudo de um sinal, é importante não esquecer as suas limitações e que a informação pode, por vezes, não estar tão clara como seria espectável. A aplicação da FFT pressupõe que o sinal representa um período, finito, de um sinal infinito e periódico, ou seja, assume-se uma topologia circular em que o primeiro elemento de dados se situa imediatamente seguinte ao último, como se estivessem ligados. Quando o sinal analisado é periódico e o conjunto de dados recolhidos corresponde a um número inteiro de períodos, a FFT do mesmo toma um aspecto ideal e, aparentemente, livre de problemas, Figura 4.2.

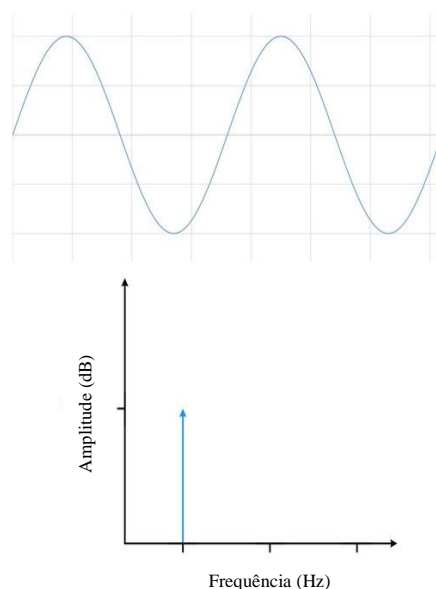


Figura 4.2 - Dados recolhidos de um sinal periódico e respectiva FFT, in  
 “<http://www.ni.com/white-paper/4844/en/> consultado em 2015-08-11”

No entanto, existem casos em que esta condição não se verifica, Figura 4.3, e o sinal recolhido não representa um valor inteiro de períodos. Isto implica que a continuidade, relativa aos pontos terminais do conjunto de dados, referida acima não seja real, embora a computorização de FFT mantenha esse pressuposto. Esta descontinuidade artificial manifesta-se na transformada sob a forma de componentes de altas frequências que não estão presentes no sinal original e assim, o espectro obtido não corresponde à realidade. Neste caso pode observar-se no sinal uma aparente fuga de energia de uma frequência para outras, fenómeno conhecido por *spectral leakage*.

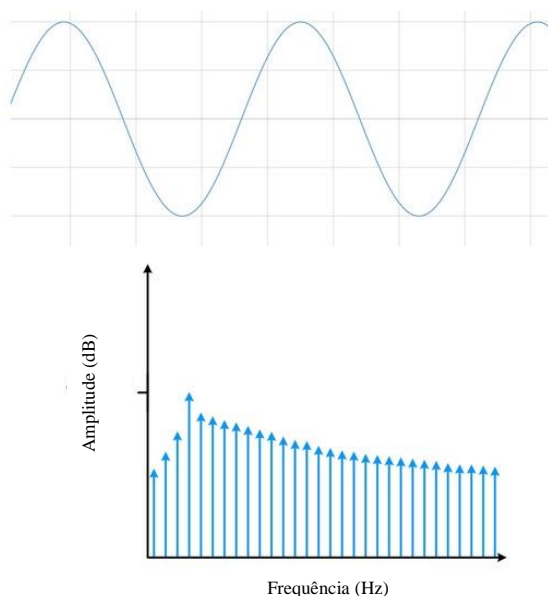


Figura 4.3 - FFT de um conjunto de dados que não representam um número inteiro de períodos do sinal, in “<http://www.ni.com/white-paper/4844/en/> consultado em 2015-08-11”

Para minimizar este efeito e para contornar o problema de descontinuidade da FFT, recorre-se à aplicação de funções janela ao sinal, processo conhecido por *windowing*. Esta técnica consiste na multiplicação da onda temporal recolhida, por uma função de comprimento finito e conhecido, que apresenta uma variação suave da sua amplitude que evolui gradualmente para o valor nulo, nos seus limites. Isto permite reestabelecer a ligação dos pontos limite, o que resulta numa onda continua sem transições abruptas cujo espectro de frequências espelha o verdadeiro espectro do sinal original.

### Função Window

No presente trabalho foi utilizada uma função janela do tipo *Hanning*, Figura 4.4. Esta função, no fundo, representa um período de uma função coseno, deslocada verticalmente de forma a que os seus valores mínimos coincidam com o valor nulo. Quando aplicada a um sinal, esta impõe o valor zero aos seus pontos limite, eliminando qualquer possível descontinuidade e o efeito negativo de *spectral leakage* é ultrapassado.

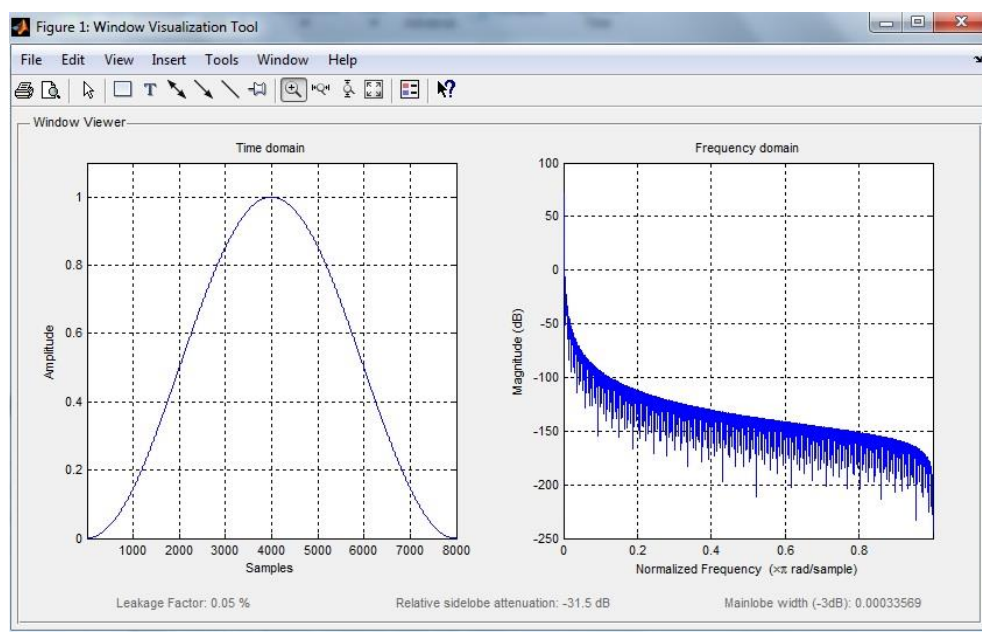


Figura 4.4 - Janela Hanning de 8000 pontos

Para além desta vantagem, a função *Hanning*, quando comparada com outras janelas, apresenta uma excelente resolução em frequência, afectando de forma muito significativa a resolução do sinal inicial, Figura 4.5. Esta capacidade de detectar frequências próximas entre si (resolução em frequência) pode ser analisada pela largura do primeiro lóbulo do seu espectro. A conjugação de todas as suas características faz com que esta função seja uma das mais utilizadas no processamento de sinais áudio.

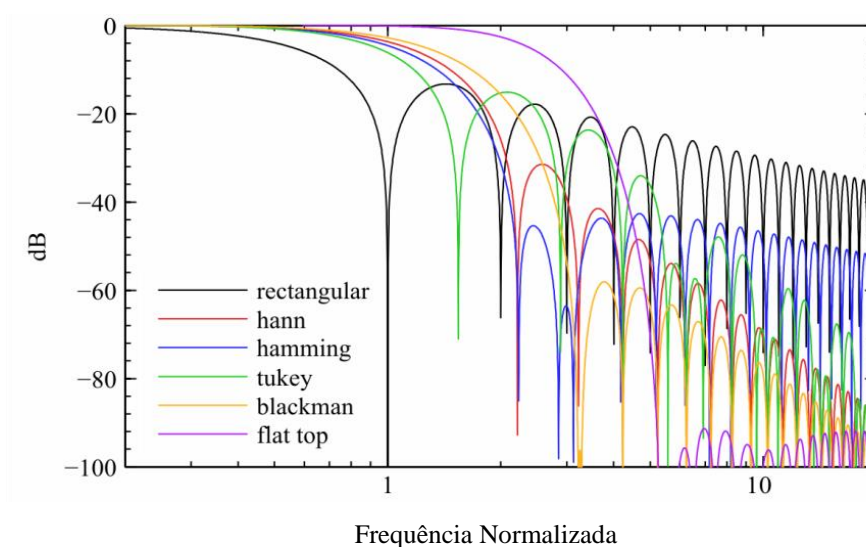


Figura 4.5 - Comparação do comportamento de diferentes funções e janela



## Passagem para domínio de frequências - FFT

Depois de concluído todo o tratamento ao sinal de entrada, pode então obter-se o seu espectro em condições adequadas à sua correcta análise. Para tal, recorre-se à função *fft* disponibilizada pelo Matlab e é necessário definir parâmetros como a dimensão da transformada e o domínio em frequências.

```
N=2^nextpow2(length(data)*4);
f=Fs*(0:floor(N/8)-1)/N;
x=abs(fft(y,N));
x=x(1:floor(N/8));
```

Figura 4.6 - Linhas de código responsáveis pela obtenção da FFT.

A expressão  $2^{\text{nextpow2}}$  permite que o valor de  $N$  seja sempre uma potência de 2, condição importante para que o processamento da FFT possa decorrer sem erros e de forma mais rápida. Os valores assinalados a vermelho na Figura 4.6 resultaram de um processo iterativo conduzido com o objectivo de encontrar o ponto óptimo de equilíbrio entre o tempo de captação de sinal necessário a resolução do espectro obtido.

## HPS

Para implementar o *Harmonic Product Spectrum*, foi concebida uma rotina, Figura 4.7, que, partindo do espectro obtido pela aplicação da FFT, realiza todas as etapas necessárias na condução deste algoritmo, já descritas anteriormente.

```
y1=x([1:2:length(x)]);
y2=x([1:3:length(x)-2]);
y3=x([1:4:length(x)]);
f3=f(1:floor(length(f)/4));

x1=x(1:length(y3));
y1=y1(1:length(y3));
y2=y2(1:length(y3));

z=x1.*y1.*y2.*y3;
fz=f3;
```

Figura 4.7 - Função criada para realização do *Harmonic Product Spectrum*

As variáveis  $y$  correspondem a versões do sinal de entrada com diferentes graus de redução no domínio de amostragem. O vector de dados correspondente ao HPS,  $z$ , é obtido através da multiplicação dos vectores  $y$ , elemento a elemento. Por fim, o domínio em frequência de  $z$ , representado por  $fz$ , é obtido pela expressão de  $f3$  que afecta o vector de entrada,  $f$ , correspondente ao domínio em frequência do sinal de entrada,  $x$ . As variáveis de saída,  $z$  e  $fz$ , reúnem os dados que, quando combinados e representados graficamente, permitem obter o espectro concentrado do sinal.

Chegando a este ponto, o algoritmo diverge para cada uma das aplicações desenvolvidas pois, a partir deste momento, elas exigem condições um pouco distintas, isto é, as funções necessárias para uma abordagem monofónica, em que se procura estudar uma imagem única e global do som, não serão, necessariamente, uteis para a afinação polifónica, por exemplo.

## 4.3 Funcionalidades do produto

### 4.3.1 Afinador monofónico (Tuner)

A rotina *Tuner* corresponde ao algoritmo desenvolvido para a afinação monofónica, ou seja, optimizado para a afinação tradicional de guitarras, corda a corda. Como referido acima, este segmento pressupõe todos os passos anteriores, já mencionados, e apenas representa uma forma de utilização da informação recolhida.

Retomando a cronologia de eventos, o passo seguinte à obtenção do espectro concentrado através do HPS consiste em encontrar a melhor estimativa possível para a  $F_0$ . Assim como explicado em capítulos anteriores, o valor procurado corresponde ao objecto do valor máximo do espectro, isto é, a frequência fundamental corresponde ao valor de  $fz$  para o qual  $z$  é maximizado. Depois de descodificada a  $F_0$  característica do sinal, resta então reorganizar a informação e fornece-la ao utilizador de uma forma agradável e simples de acompanhar. Para tal, foram criadas algumas sub-rotinas para auxiliar o processo e que serão explicadas de seguida.

#### **Função *Octave***

Esta primeira função permite situar a frequência fundamental recolhida, de forma constante, na quarta oitava da escala musical. Isto revela-se bastante útil pois permite concentrar todos os resultados numa gama entre, aproximadamente, os 255 e os 509 Hz, bastante mais estreita do que o domínio de análise da  $F_0$ . Estes valores foram escolhidos por conterem, entre eles, as frequências de todas as notas que constituem a 4ª oitava da escala musical. Assim, é possível apresentar os resultados numa janela mais reduzida e com os resultados muito mais próximos entre si, para além de facilitar a geração de referências para afinação, como será explicado de seguida.

```

    flag=true;
    z=x;
    while flag==true
        if z<508.6 && z>=254.3
            flag=false;
        elseif z<254.3
            z=z*2;
        elseif z>=508.6
            z=z/2;
        end
    end
    y=z;

```

Figura 4.8 - Código da função *Octave*

### Função *FindNote*

Partindo da frequência obtida pela função *Octave*, esta nova rotina permite determinar a referência tonal mais próxima desse valor e que será indicada como o ponto para qual se pretende que a afinação convirja.

```

Notas = ['C ','C#','D ','D#','E ','F ','F#','G ','G#','A ','A#','B '];
Freqs = [0; 261.63; 277.18 ;293.66; 311.13; 329.63; 349.23; 369.99; 392; 415.30; 440; 466.16 ;493.88; 2000];

for i=2:13
    if x >= (Freqs(i)+Freqs(i-1))/2 && x < (Freqs(i)+Freqs(i+1))/2
        y = Freqs(i);
        s = Notas(i-1,1);
        w = Notas(i-1,2);
        z = [s w];
    end
end

```

Figura 4.9 - Código da função *FindNote* responsável por encontrar a nota da escala que servirá de referência para a afinação

Como se pode observar na figura 4.9, a cada ciclo procura-se o valor de entrada,  $x$ , num conjunto diferente que corresponde ao domínio de valores mais próximos de um dado semitom. Por exemplo, no terceiro ciclo,  $i = 4$ , o conjunto analisado corresponde a valores de frequência entre o valor médio calculado entre 277.18 Hz (C#) e 293.66 Hz (D) e o valor médio entre 293.66 Hz (D) e 311.13 Hz (D#).

Por fim, depois de guardados os valores de  $F_0$  e da referência pela qual se irá orientar a afinação, organizam-se os dados numa janela gráfica como a representada na figura 4.10.

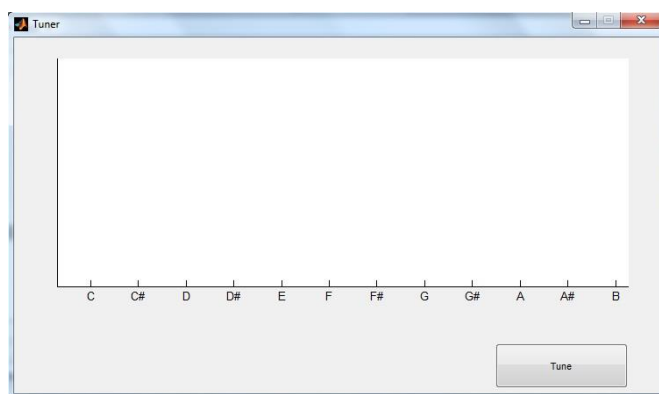


Figura 4.10 - Interface gráfica do afinador monofónico

## Precisão

A relação entre a frequência estimada e a referência pela qual esta é afinada é definida em *cents* através da expressão (2.3). Esta abordagem permite um melhor acompanhamento da precisão da afinação, e uma melhor interpretação dos resultados. Tendo em conta as condições e trabalho, os objectivos e os princípios do mesmo, foi definida uma precisão de  $\pm 2$  cents para esta aplicação, ou seja, sempre que a distancia entre a frequência estudada e frequência da nota de referência for inferior a 2 cents, esta será considerada como se estivesse afinada. Na interface gráfica da aplicação é apresentada, segundo uma linha vertical azul, a nota referência e, simultaneamente, segundo uma linha vertical vermelha, a nota que se pretende afinar. Enquanto a corda da guitarra é afinada, a linha vermelha aproxima-se gradualmente da referência e, quando as notas estão afinadas, apenas é apresentada uma linha vertical verde na posição de referência, Figuras 4.11 e 4.12.

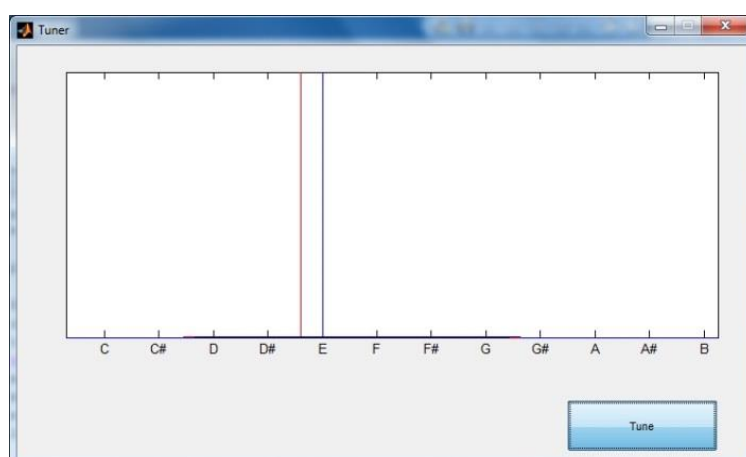


Figura 4.11 - Nota desafinada

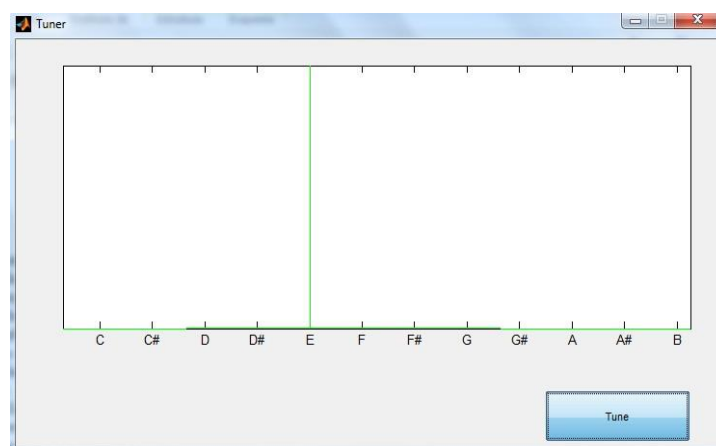


Figura 4.12 - Nota afinada

#### 4.3.2 Afinador polifónico (Polyfonic Tuner)

O código desenvolvido para esta aplicação, tal como o nome indica, permite ao utilizador uma afinação polifónica da sua guitarra, ou seja, permite o acompanhamento simultâneo e constante da frequência emitida por cada uma das seis cordas. Partindo do espectro obtido pelo produto harmónico, a análise polifónica não procura apenas a frequência mais influente, mas sim, o conjunto das frequências fundamentais de cada série harmónica detectada.

Para tal e sabendo, inicialmente, a gama de frequências emitida por uma guitarra, o sinal é dividido e analisado em seis porções, cada uma contemplando um conjunto de frequências previsto para cada corda. Assim, não é procurado apenas um máximo para todo o espectro, mas um máximo para cada subdivisão, em que cada um dos picos detectados está relacionado com a frequência fundamental do som de uma corda. Desta forma, foi escolhida uma divisão em conjuntos limitados por  $\pm 150$  cents relativos à frequência fundamental de referência para cada corda.

Tabela 4.4 - Conjuntos de frequências de análise para cada corda

<b>6ª Corda - E</b>	<b>[70,95] Hz</b>
<b>5ª Corda - A</b>	<b>[96,128] Hz</b>
<b>4ª Corda - D</b>	<b>[129,170] Hz</b>
<b>3ª Corda - g</b>	<b>[171,220] Hz</b>
<b>2ª Corda - b</b>	<b>[221,285] Hz</b>
<b>1ª Corda - e</b>	<b>[286 365] Hz</b>

Um dos problemas mais significantes encontrados nesta abordagem foi a concentração de harmônicos de séries diferentes detectada em algumas zonas na escala de frequências. Nestas zonas era comum surgir um harmônico, não fundamental, emitido por uma determinada corda, mais intenso do que o primeiro harmônico emitido por outra quando, na zona em análise, se pretendia encontrar este último. Esta situação levava a uma estimativa errada, uma vez que, ao procurar o valor máximo, se encontrava um valor que não correspondia à frequência fundamental procurada, mas a um harmônico correspondente uma  $F_0$  mais baixa.

Para contornar este obstáculo optou-se por uma análise sequencial partindo da gama de frequências mais baixa, relativa a sexta corda da guitarra, até à gama mais alta, frequências emitidas pela primeira corda. Assim, começa-se por procurar a  $F_0$  mais baixa e, depois de encontrada, filtra-se esta frequência e o seu segundo harmônico do sinal, eliminando a sua interferência nas análises posteriores.

Esta solução, apesar de ser algo limitativa, revelou-se eficiente e suficiente para o resultado final pretendido. No final, os valores obtidos para a  $F_0$  de cada corda, são apresentados, graficamente, juntamente com os valores de referencia de cada corda.

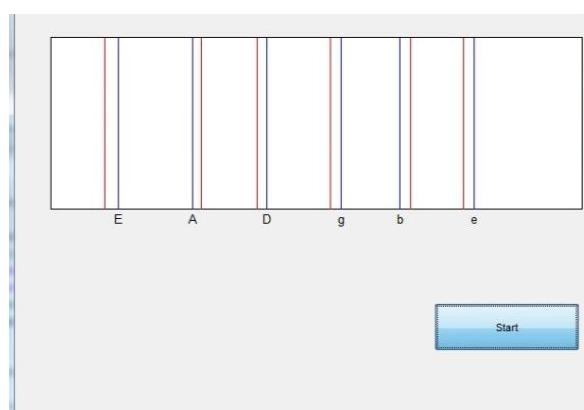


Figura 4.13 - Interface da aplicação *Polyfonic Tuner*. Exemplo de guitarra desafinada

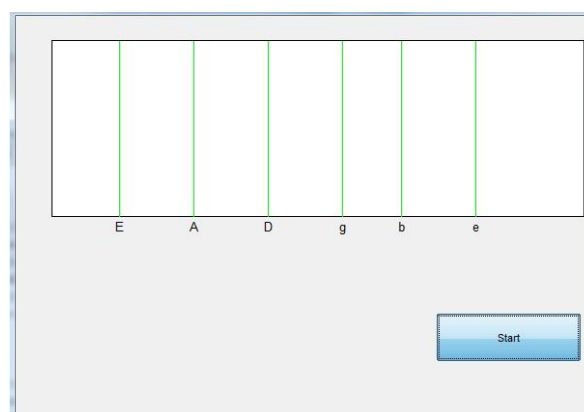


Figura 4.14 - Feedback oferecido pela aplicação quando a guitarra está afinada

De forma semelhante à solução apresentada na aplicação anterior, a janela do *Polyfonic Tuner* apresenta, inicialmente, as notas captadas a vermelho e as respectivas referências a azul, Figura 4.13. Quando uma corda está afinada, é apresentada, no local da sua referência, uma linha vertical a verde, Figura 4.14.

## 4.4 Teste e comprovação de conceito

Com o objectivo de comprovar a eficiência e aplicabilidade do produto desenvolvido, foram realizados testes para as duas funcionalidades em alguns cenários particulares. Procurou-se estudar o seu comportamento em circunstâncias diferentes, por isso, ambas as aplicações foram testadas em duas condições distintas. O primeiro teste foi realizado com uma guitarra acústica em que o som é captado directamente da guitarra. No segundo teste foi utilizada uma guitarra eléctrica amplificada, em que o som captado foi o emitido pelo amplificador.

Em cada teste foi primeiro utilizada a função *Tuner* para afinar a guitarra, previamente desafinada de forma aleatória. Depois de afinada, utilizou-se a função *Polyfonic Tuner* e estudou-se a correspondência entre os valores obtidos para as duas aplicações. Por fim, em cada cenário foi utilizada a aplicação GuitarTuna™, desenvolvida pela empresa Yousitian, como base de comparação de resultados.

### 4.4.1 Teste com guitarra acústica

Neste primeiro cenário, a guitarra foi desafinada, aleatoriamente, e foram recolhidos os desvios de afinação para cada corda utilizando cada uma das três aplicações utilizadas no teste. Os desvios apresentados foram calculados em *cents* para facilitar a análise relativa de valores.

Tabela 4.5 - Desvios de afinação iniciais do teste com guitarra acústica

Corda	GuitarTuna™	Tuner	Polyfonic Tuner
<b>E (Mi)</b>	-90	-92	-92
<b>A (Lá)</b>	+60	+59	+58
<b>D (Ré)</b>	-50	-51	-51
<b>g (Sol)</b>	-68	-68	-68
<b>b (Si)</b>	+70	+68	+68
<b>e (Mi)</b>	-78	-78	-79

De seguida utilizou-se a aplicação Tuner para afinar a guitarra e foram recolhidos os novos desvios. Depois, sem alterar a afinação da guitarra, verificaram-se os desvios correspondentes nas duas restantes aplicações e comparou-se os resultados obtidos.

Tabela 4.6 - Resultados da afinação obtidos através das três aplicações

<b>Corda</b>	<b>GuitarTuna <sup>TM</sup></b>	<b>Tuner</b>	<b>Polyfonic Tuner</b>
<b>E (Mi)</b>	+2	+2	+2
<b>A (Lá)</b>	-1	-2	-2
<b>D (Ré)</b>	+2	+2	+2
<b>g (Sol)</b>	-2	-2	-2
<b>b (Si)</b>	+1	+1	+1
<b>e (Mi)</b>	-1	0	0

A análise da tabela 4.6 mostra resultados muito próximos entre os diferentes afinadores, o que indica, não só a similaridade de comportamento entre as duas funções desenvolvidas durante o projecto, mas também uma boa resposta quando confrontadas com um produto bem estabelecido no mercado.

#### 4.4.2 Teste com guitarra eléctrica

O segundo teste realizou-se de forma idêntica ao primeiro, tendo como principal objectivo estudar o comportamento dos algoritmos desenvolvidos numa situação diferente, em que o som não é captado directamente da origem e, por isso, transporta algum ruído que pode condicionar a afinação do instrumento.

Assim, a guitarra, desta vez eléctrica, foi também desafinada de forma aleatória apresentando os desvios discriminados na tabela 4.7.

Tabela 4.7 - Desvios iniciais do teste com guitarra eléctrica

<b>Corda</b>	<b>GuitarTuna <sup>TM</sup></b>	<b>Tuner</b>	<b>Polyfonic Tuner</b>
<b>E (Mi)</b>	-140	-136	-136
<b>A (Lá)</b>	+80	+81	+80
<b>D (Ré)</b>	-129	-130	-130
<b>g (Sol)</b>	-140	-141	-141
<b>b (Si)</b>	+76	+78	+77
<b>e (Mi)</b>	-61	-63	-60



Depois, tal como no teste anterior, a guitarra foi afinada utilizando a função *Tuner* e os resultados obtidos foram comparados com as restantes aplicações.

Tabela 4.8 - Desvios de afinação obtidos no final da afinação da guitarra eléctrica

<b>Corda</b>	<b>GuitarTuna™</b>	<b>Tuner</b>	<b>Polyfonic Tuner</b>
<b>E (Mi)</b>	+1	+2	+1
<b>A (Lá)</b>	+1	-1	-2
<b>D (Ré)</b>	-1	+1	+2
<b>g (Sol)</b>	-3	-2	+3
<b>b (Si)</b>	-2	-1	-3
<b>e (Mi)</b>	-1	0	0

#### 4.4.3 Conclusões

Dos testes realizados pôde concluir-se alguns aspectos bastante interessantes. No primeiro teste verificou-se uma grande similaridade de resultados entre as três aplicações, o que pode ser interpretado como um ponto favorável à avaliação dos algoritmos concebidos pois, não só apresentam uma notória concordância no desempenho, mas também por apresentarem resultados muito semelhantes aos fornecidos por uma aplicação que é, actualmente, líder do ranking de aplicações IOS mais descarregadas, na categoria de afinadores de guitarra. Estes resultados fazem crer que as funções desenvolvidas têm aplicabilidade real e que fornecem um feedback correcto ao utilizador.

No segundo teste, com a introdução de novas variáveis e consequente distorção do sinal original, os resultados, apesar de não serem considerados negativos, não foram tão encorajadores como no primeiro. Neste caso, verificou-se uma maior dificuldade na afinação e os desvios resultantes da mesma não foram concordantes entre os três afinadores. A aplicação *Polyfonic Tuner* revelou-se mais sensível ao ruído introduzido no sinal e ambos os algoritmos desenvolvidos apresentaram resultados, ligeiramente, diferentes dos obtidos com a aplicação *GuitarTuna™*.

Contudo, tendo em consideração os objectivos do trabalho, o balanço retirado dos dois testes revela-se bastante positivo pois, mesmo as maiores variações de resultado obtidas, não se revelam muito significativas para que seja possível atingir o objectivo a alcançar, ou seja, afinar correctamente uma guitarra.



## 5 Conclusões e trabalhos futuros

---

Ao longo do presente relatório foi apresentado um *software*, concebido de raiz, de processamento digital de sinais, capaz de auxiliar a afinação de guitarras. Os principais objectivos estipulados para este produto foram encontrar uma solução eficiente, simples e de fácil utilização. Para tal, foram adoptadas várias técnicas de análise de sinais áudio, amplamente utilizadas em aplicações semelhantes como, a análise de Fourier, filtragem e tratamento de sinais e algoritmos de *pitch detection*.

Existem várias abordagens possíveis para conceber um *software* de um afinador de guitarras, diferentes formas de captação de sinais, diferentes alternativas para o tratamento desses sinais, diferentes métodos para estimar a sua tonalidade ou frequência fundamental e diferentes formas de apresentar os resultados obtidos.

No que diz respeito às técnicas de processamento digital de sinais, está actualmente disponível uma grande variedade de algoritmos que abordam o sinal tanto na sua base temporal, como a ACF, na base de frequências, no caso do HPS ou até explorando as vantagens de ambas as soluções, como no *Cepstrum*. É de realçar a importância da análise de Fourier que permite esta transformação de domínios, sem a qual muitos dos algoritmos apresentados não existiriam.

Ao longo do trabalho desenvolvido foram também surgindo algumas complicações que exigiram um estudo paralelo mais aprofundado sobre as matérias envolventes, como no caso do tratamento de ruídos externos detectados no sinal, ou da própria destreza de programação necessária para progredir no algoritmo. Um dos principais obstáculos deste trabalho foi, sem dúvida, encontrar o melhor compromisso entre as resoluções temporal/frequencial das aplicações desenvolvidas. A ultrapassagem deste problema exigiu, sobretudo, um processo iterativo intenso, onde foram conjugados diferentes tempos de aquisição com vários valores de frequência de amostragem e também diferentes tamanhos adoptados para a FFT.

Com o desenvolver do projecto, tornou-se cada vez mais notória a importância do hardware e da plataforma utilizada para reproduzir os algoritmos que, apesar de não terem condicionado o cumprimento dos objectivos propostos, evidenciaram que não serão os mais adequados para aplicações com a finalidade deste trabalho.

Os testes realizados ao produto desenvolvido, apesar de pouco extensos, indicaram bons resultados mesmo quando o sinal analisado se apresenta distorcido e afectado por ruídos. Estes revelaram uma precisão bastante aceitável, com variações de afinação por volta dos 2 cents, que cumpre os requisitos mínimos necessários para uma afinação correcta. Nas provas também se identificou uma maior sensibilidade a ruídos por parte da aplicação *Polyphonic Tuner*, provavelmente devido à dificuldade em controlar as influências harmónicas dos diferentes componentes do sinal já que, neste caso a análise de frequências é realizada por

secções. Contudo, a comparação de resultados com o *software* GuitarTuna™ mostrou corroborar os bons indícios deixados pelo produto desenvolvido.

Apesar dos resultados encorajadores obtidos, a verdade é que este trabalho apresenta condições para que se dê continuidade a esta abordagem, começando pela utilização de hardware mais dedicado, que permita maior flexibilidade e qualidade no processamento dos sinais. Também seria interessante adoptar técnicas de *pitch detection* diferentes e explorar o comportamento do produto, comparando os resultados com os obtidos neste relatório.

Depois de concluídas as optimizações propostas, poderia adoptar-se outra plataforma de programação que resultasse numa aplicação mais ergonómica, passível de ser instalada em dispositivos móveis, para que o produto pudesse acompanhar o utilizador no seu percurso diário.

## Referências

---

1. Loschi, R.F. and R.S. Fortes, *Afinador Eletrônico*, 2005: Universidade Presidente Antonio Carlos (UNIPAC).
2. Smith, S.W., *The scientist and engineer's guide to digital signal processing*, 1997, California Technical Publishing.
3. Sethares, W.A., *Tuning, timbre, spectrum, scale*. 2005: Springer Science & Business Media.
4. Fonseca, N., *Introdução à engenharia de som*. Lisboa: FCA– Editora de Informática, Lda., cop, 2007.
5. Wallin, N.L. and B. Merker, *The origins of music*. 2001: MIT press.
6. Rutter, S., *The Great Animal Orchestra: Finding the Origins of Music in the World's Wild Places*, 2012, Reed Business Information 360 Park Avenue South, New York, ny 10010 USA.
7. Reis, J.M.d.M., *Técnicas de sonar para detecção de obstáculos em navegação*, 1999, Universidade do Porto: Faculdade de Engenharia
8. Pierce, J. *Consonance and scales*. in *Music, cognition, and computerized sound*. 1999. MIT Press.
9. Olson, H.F., *Music, physics and engineering*. Vol. 1769. 1967: Courier Corporation.
10. Benward, B. and M.N. Saker, *Music in theory and practice*. Vol. 1. 2007: McGraw-Hill.
11. Findlay, S. and J. Zhu, *The Evolution of the Guitar Strumming Its Way Through the Ages*. New Oriental English (Teens), 2011. **4**: p. 023.
12. Tillman, J.D., *Response effects of guitar pickup position and width*. URL: <http://www.till.com/articles/PickupResponse/index.html>, 2001.
13. Varèse, E. and C. Wen-Chung, *The liberation of sound*. Perspectives of new music, 1966: p. 11-19.
14. Feldmann, H., *[History of the tuning fork. I: Invention of the tuning fork, its course in music and natural sciences. Pictures from the history of otorhinolaryngology, presented by instruments from the collection of the Ingolstadt German Medical History Museum]*. Laryngo-rhino-otologie, 1997. **76**(2): p. 116-122.
15. Fourier, J., *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*. Nouveau Bulletin des Sciences de la Société Philomathique de Paris, 1808. **6**: p. 112-116.
16. Dirichlet, P.G.L., *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*. arXiv preprint arXiv:0806.1294, 2008.
17. Ramirez, R.W., *The FFT. Fundamentals and concepts*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1985, 1985. **1**.
18. Fletcher, H. and W.A. Munson, *Loudness, Its Definition, Measurement and Calculation\**. Bell System Technical Journal, 1933. **12**(4): p. 377-430.

19. Hess, W., *Pitch determination of speech signals: algorithms and devices*. Vol. 3. 2012: Springer Science & Business Media.
20. McLeod, P., *Fast, accurate pitch detection tools for music analysis*. Academisch proefschrift, University of Otago. Department of Computer Science, 2009.
21. Oppenheim, A.V., *RW Schafer 'Digital Signal Processing'*, 1975, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
22. Bogert, B.P., M.J. Healy, and J.W. Tukey. *The quefrency alanalysis of time series for echoes: Cepstrum, pseudo-autocovariance, cross-cepstrum and saphe cracking*. in *Proceedings of the symposium on time series analysis*. 1963.
23. Noll, A.M., *Cepstrum pitch determination*. The journal of the acoustical society of America, 1967. **41**(2): p. 293-309.